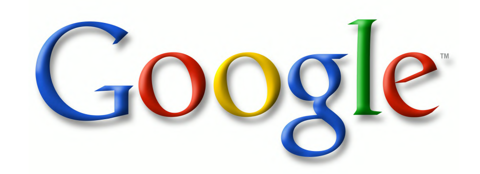


OSTWALD'S KLASSIKER
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN.
Nr. 133.

J. H. LAMBERT'S
ABHANDLUNGEN
ZUR
BAHNBESTIMMUNG DER COMETEN

INSIGNIORES ORBITAE COMETARUM PROPRIETATES
(1761)

OBSERVATIONS SUR L'ORBITE APPARENTE
DES COMÈTES (1771)

AUSZÜGE AUS DEN
»BEITRÄGEN ZUM GEBRAUCHE DER MATHEMATIK«
(1772)

WILHELM ENGELMANN IN LEIPZIG.

OSTWALD'S KLASSIKER
DER
EXAKTEN WISSENSCHAFTEN.

E

Nr. 2. … .rten … ngs- … rin.

» 5. … an-

» 14. … ctio- … S.)

» 17. … bers. … ius.

» 19. … lace … hlet

» 46. … nd- … und … Mit

» 47. … 762, … von

» 54. … der … rin.

» 55. … 779 … ten.

» 60. **Jacob Steiner,** Die geometr. Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten und zur praktischen Benutzung. (1833.) Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 25 Textfiguren. (85 S.) ℳ 1.20.

» 64. **C. G. J. Jacobi,** Über die vierfach periodischen Functionen zweier Variabeln, auf die sich die Theorie der Abel'schen Transcendenten stützt. (1834.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A.

Nachgesehen

Nr. 65. **Georg Rosenhain,** Abhandlung über die Functionen zweier Variabler mit vier Perioden, welche die Inversen sind der ultraelliptischen Integrale erster Klasse. (1851.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Französischen übersetzt von A. Witting (94 S.) ℳ 1.50.

» 67. **A. Göpel,** Entwurf einer Theorie der Abel'schen Transcendenten erster Ordnung. (1847.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (60 S.) ℳ 1.—.

» 71. **N. H. Abel,** Untersuchungen über die Reihe:
$$1+\frac{m}{1}x+\frac{(m\cdot m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2+\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3+\cdots\cdot$$
(1826.) Herausgegeben von A. Wangerin. (46 S.) ℳ 1.—.

» 73. **Leonhard Euler,** Zwei Abhandlungen über sphärische Trigonometrie. Grundzüge der sphärischen Trigonometrie und allgemeine sphärische Trigonometrie. (1753 u. 1779.) Aus dem Französischen und Lateinischen übersetzt und herausgegeben von E. Hammer. Mit 6 Figuren im Text. (65 S.) ℳ 1.—.

» 77. **C. G. J. Jacobi,** Über die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten. (De formatione et proprietatibus Determinantium.) (1841.) Herausgegeben von P. Stäckel. (73 S.) ℳ 1.20.

» 78. **J. C. G. Jacobi,** Über die Functionaldeterminanten. (De determinantibus functionalibus.) (1841.) Herausgegeben von P. Stäckel. (72 S.) ℳ 1.20.

» 82. **Jacob Steiner,** Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität etc. (1832.) I. Theil. Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 14 Fig. im Text. (126 S.) ℳ 2.—.

» 83. —— —— II. Theil. Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 2 Figuren im Text. (162 S.) ℳ 2.40.

» 90. **A. Bravais,** Abhandlung über die Systeme von regelmässig auf einer Ebene oder im Raum vertheilten Punkten. (1848.) Übers. u. herausgegeben von C. u. E. Blasius. Mit 2 Tafeln. (142 S.) ℳ 2.—.

» 91. **G. Lejeune Dirichlet,** Untersuchungen über verschiedene Anwendungen der Infinitesimalanalysis auf die Zahlentheorie. (1839 bis 1840.) Deutsch herausgegeben von R. Haussner. (128 S.) ℳ 2.—.

» 93. **Leonhard Euler,** Drei Abhandlungen über Kartenprojection. (1777). Mit 9 Textfig. Herausg. von A. Wangerin. (78 S.) ℳ. 1.20.

» 103. **Joseph Louis Lagrange's** Zusätze zu Euler's Elementen der Algebra. Unbestimmte Analysis. Aus dem Französischen übersetzt von A. J. von Oettingen, herausg. von H. Weber. (171 S.) ℳ 2.60.

» 107. **Jakob Bernoulli,** Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi). (1713.) I. u. II. Theil. Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. Mit 1 Figur im Text. (162 S.) ℳ 2.50.

» 108. —— —— III. u. IV. Theil mit dem Anhange: Brief an einen Freund über das Ballspiel (Jeu de Paume). Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. Mit 3 Fig. (172 S.) ℳ 2.70.

» 111. **N. H. Abel,** Abhandlung über eine besondere Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen. Herausgegeben von Alfred Loewy. (50 S.) ℳ —.90.

Nr. 112. **Augustin-Louis Cauchy,** Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen (1825). Herausgegeben von P. Stäckel. (80 S.) ℳ 1.25.

» 113. **Lagrange** (1772) und **Cauchy** (1819), Zwei Abhandlungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Aus dem Französischen übersetzt und herausgegeben von Dr. Gerhard Kowalewski. (54 S.) ℳ 1.—.

» 116. **Lejeune Dirichlet,** Die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen (1837) und **Philipp Ludwig Seidel,** Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen (1847). Herausgegeben von Heinrich Siebmann. (58 S.) ℳ 1.—.

» 117. **Gaspard Monge,** Darstellende Geometrie (1798). Übersetzt und herausgegeben von Robert Haussner. Mit zahlreichen Figuren in dem Texte und in den Anmerkungen. (217 S.) ℳ 4.—.

» 122. **Carl Friedrich Gauss,** Sechs Beweise des Fundamentaltheorems. über quadratische Reste. Herausgegeben von Eugen Netto. (111 S.) ℳ 1.80.

» 123. **Jacob Steiner,** Einige geometrische Betrachtungen (1826). Herausgegeben von Rudolf Sturm. Mit 46 Figuren im Texte und in den Anmerkungen. (125 S.) ℳ 2.—.

» 127. **Jean Baptiste Joseph Baron Fourier,** Die Auflösung der bestimmten Gleichungen. (Analyse des équations déterminées.) (IV u. 262 S.) ℳ 4.—.

» 129. **Johann Friedrich Pfaff,** Allgemeine Methode, partielle Differentialgleichungen zu integriren (1815). Aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben von Gerhard Kowalewski. (84 S.) ℳ 1.40.

» 130. **N. J. Lobatschefskij,** Pangeometrie (Kasan 1856). Übersetzt und herausgegeben von Heinrich Liebmann. Mit 30 Figuren im Text. (96 S.) ℳ 1.70.

» 133. **J H. Lambert's** Abhandlungen zur Bahnbestimmung der Cometen. Insigniores orbitae Cometarum proprietates (1761). Observations sur l'Orbite apparente des Comètes (1771). Auszüge aus den »Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik« (1772). Deutsch herausgegeben und mit Anmerkungen versehen von J. Bauschinger. Mit 35 Figuren im Text. (149 S.) ℳ 2.40.

J. H. Lambert's

Abhandlungen zur Bahnbestimmung der Cometen

Insigniores orbitae Cometarum proprietates (1761)

Observations sur l'Orbite apparente des Comètes (1771)

Auszüge aus den »Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik« (1772)

Deutsch herausgegeben und mit Anmerkungen versehen

von

J. Bauschinger

Mit 35 Figuren im Text

Leipzig

Verlag von Wilhelm Engelmann

1902

I.

Ueber die Eigenschaften der Cometenbewegung.

(Insigniores orbitae Cometarum proprietates, 1761.)

Vorrede.

[III] Es giebt viele Capitel der angewandten Mathematik, die trotz mehrfacher Behandlung noch weit von dem nothwendigen Grade der Ausbildung entfernt sind. Zwei Gründe sind es wohl hauptsächlich, die eine Verzögerung hierin verursachen. Wenn nämlich, wie in der Regel der Fall ist, die Theorie der Anwendung halber ausgebaut wird, so geht man häufig, erstere nur oberflächlich behandelnd, rasch zur Anwendung über und betritt den sich zuerst darbietenden Weg ohne Rücksicht, ob er [IV] kurz oder ein Umweg ist. Und andererseits zeigt auch die Theorie, wenn man sie sorgfältig entwickeln will, nicht selten das Problem von einer so verwickelten und schwierigen Seite, schon beim ersten Angriff, dass auch ein geduldiger Arbeiter, der unverdrossen nach Problemen sucht, abgeschreckt wird. Aber welche Hoffnung könnte einen Forscher mehr anreizen, ein Problem nochmals anzugreifen, als die, es schliesslich doch zu überwinden oder wenigstens Anderen den Weg zu bahnen, die um jeden Preis zum wahren Ziele gelangen wollen.

Wo ich immer diese Ursachen vorfand, habe ich gesehen, dass jedes schwierige Problem eine ihm eigenthümliche Methode und eine besondere Verbindung von heuristischen Kunstgriffen verlangt; solange diese nicht beisammen sind, bekommt man keine elegante Lösung oder wenigstens nur auf weiten Umwegen. Häufig wird auch der wahre Kern der Frage noch [V] verkannt, oder man sieht nicht, was man suchen soll, und geht so an dem wahren Angelpunkt vorüber. Nach meiner Erfahrung empfiehlt es sich, wenn man eine solche schwierige Materie zu behandeln hat, unter allen Umständen, einen einfachen speciellen Fall herauszugreifen; denn nicht selten findet

sich, dass die schönsten Eigenschaften desselben sich mit geringen Aenderungen verallgemeinern lassen; so stellt sich oft eine schwierige Sache, wenn gehörig durchgeführt, als leicht heraus. Auch deshalb kann eine Sache oft nicht in Fluss gebracht werden, weil sie durch zu viele Nebenumstände verhüllt ist, und erst wenn sie ganz durchschaut ist, erkennt man diese als fremd oder willkürlich.

Beispiele für diese Behauptungen will ich aus anderen Wissenschaften nicht vorbringen, da man ihrer in dem vor- [VI] liegenden Werke genug findet. Ich habe darin die *wichtigsten Eigenschaften der Cometenbewegung* auf dieselbe Weise entwickelt wie vor drei Jahren die der Lichtstrahlen auf ihrem Wege durch mehrere durchsichtige, sphärische und concentrische Medien (»Les propriétés remarquables de la route de la lumière par les airs etc.« A la Haye 1758).

Methoden, eine Cometenbahn aus drei geocentrischen Beobachtungen durch Versuche, Construction oder Messung zu ermitteln, kennt man schon viele; wer meine Vorgänger kennt, wird daher glauben, es werde hier eine alte Sache nochmals abgewandelt. Ich gebe auch zu, dass ich sehr berühmte Vorgänger habe, aber doch eben nur Pfadfinder, die von den Quellen an sprungweise dahin gelangt sind, wohin eine gute Theorie auf einem schönen Wege hätte führen müssen. Die ersten Principien und Gesetze des Himmels ausgenommen, blieben sie von dem eigentlichen Problem, das hier unser Hauptziel ist, nämlich die Bahn aus drei Beobachtungen zu entwickeln, [VII] sehr weit entfernt. Musste es nicht auffallen, dass die schönen Eigenschaften der Kegelschnitte, die durch den Wetteifer der grössten Geometer aller Zeiten erforscht wurden, ganz unnütz sein sollten, sobald es sich um Cometenbahnen handelte? Das war doch unter allen Umständen des Versuches werth und keine eitle Hoffnung, und der Erfolg hat denn auch gezeigt, dass jene schönen Eigenschaften nur noch schöner hervortreten, wenn man sie auf die Cometenbahnen in der Weise anwendet, dass man an Stelle der Flächen die Zeit setzt. Ich habe diejenigen Sätze, welche die Kegelschnitte unabhängig von den Cometenbahnen betreffen, um ihre allgemeinere Bedeutung hervorzuheben, mit »*Lemma*« bezeichnet und sie so von den übrigen, die sich auf die Cometenbahnen beziehen, unterschieden. Die schon bekannten Sätze habe ich unter die neuen eingereiht, damit der Zusammenhang klarer hervortrete. Von dem Neuen habe ich jedoch nur das vorgebracht, was

mir schön erschien, und dann solches, was Weiterforschenden den Weg weisen konnte, wie ich immer gleich angedeutet [VIII] habe. Ich meine hier z. B. die Ueberlegungen über die orthographische Projection auf die Ebene der Ekliptik oder eine andere zweckmässig gewählte Ebene: dann gewisse Sätze im ersten der eigentlichen Abhandlung vorausgehenden Theile, und solche im vierten Theile, wo ich kurz den Unterschied zwischen parabolischen, elliptischen und hyperbolischen Bahnen berühre. Mein Hauptziel war die parabolische Bahn; hier sind die Sätze und Aufgaben so einleuchtend, dass ich auch der Beispiele nicht bedurfte, die man sonst hinzufügt. Die elliptischen Bahnen habe ich im vierten Theile nur so weit ausgeführt, dass man den Zusammenhang der schönsten Eigenschaften der parabolischen Bahn mit den entsprechenden der anderen Kegelschnitte klar durchschauen konnte. Wer auf diesem Gebiete sich gründlicher belehren will, muss zu dem ausgezeichneten Werke von *Euler* »*Theoria motuum Planetarum et Cometarum*« greifen.

Erster Theil.

Allgemeinere vorbereitende Sätze über die Parabel.

[1] § 1. **Lemma 1.** (Fig. 1.) *Wird in der Parabel AN, deren Axe AF und deren Brennpunkt F ist, ein beliebiger Radius-*

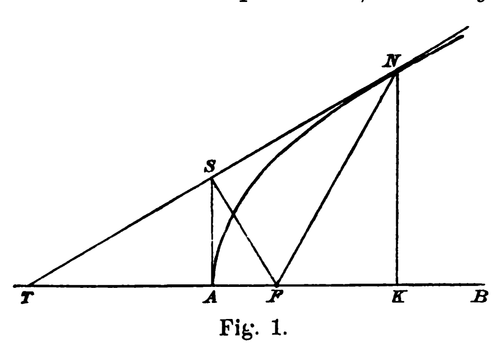


Fig. 1.

vector FN gezogen und in seinem Endpunkt die Tangente NT, so ist Winkel $TNF = \frac{1}{2} NFB$.

Beweis: Da nach der Natur der Parabel $FT = FN$ ist, so wird Winkel $FTN = TNF$; nun ist $FTN + TNF = NFB$, also $TNF = \frac{1}{2} NFB$.

§ 2. **Lemma 2.** (Fig. 1.) *Wird im Scheitel A der Parabel das Lot AS zur Axe errichtet, welches die Tangente TN in S schneidet, und wird S mit dem Brennpunkte F verbunden, so wird der Winkel AFN durch FS halbirt und die Dreiecke AFS und FSN werden ähnlich.*

[2] Beweis: Da nämlich $TS = SN$ und $FT = FN$, so wird Winkel $TFS = SFN$. Ferner steht FS auf der Tangente TN senkrecht und das Dreieck FSN ist somit rechtwinklig. Da aber Winkel SAF ein Rechter ist, so ist auch das Dreieck FAS rechtwinklig. Wegen der Gleichheit der Winkel AFS und SFN haben also beide Dreiecke gleiche Winkel, sind somit ähnlich.

§ 3. **Zusatz 1.** Es ist also: $AF : FS = FS : FN$ oder *FS ist die mittlere Proportionale zwischen FA und FN.*

§ 4. **Zusatz 2.** Da Winkel $ASF = SNF$; so wird $AF = SF \cdot \sin ASF = SF \cdot \sin SNF = FN \cdot \sin FNT^2$. *Ist daher der Radiusvector FN gegeben und der Winkel FNT, so wird daraus sehr leicht der Abstand des Brennpunktes vom Scheitel AF und die Lage der Axe gefunden.*

§ 5. **Zusatz 3.** Da der Winkel FSN constant ein Rechter ist, so können, wenn der Brennpunkt F und die Gerade AS ihrer Lage nach gegeben sind, *durch Ziehen von Normalen zu den Verbindungslinien von F mit beliebigen Punkten S beliebig viele die Parabel einhüllende Tangenten construirt werden.*

§ 6. **Anmerkung.** Die folgenden Sätze sind längst bekannt und können mit wenig Aenderungen auf die anderen [3] Kegelschnitte angewendet werden; in Bezug auf die Parabel mögen sie wie folgt dargelegt werden.

§ 7. **Lemma 3.** (Fig. 2.) *Wenn an zwei Punkte N und M der Parabel die Tangenten NR und RM gelegt und vom Brennpunkte F die Geraden FN, FM, FR gezogen werden, so sind die Dreiecke FNR und FRM ähnlich und, wenn die Tangente MR bis T verlängert wird, ist der Winkel $TRN = NFR = RFM$.*

Beweis: Man errichte im Scheitel A die Normale AT zur Axe AF, verlängere die Tangenten RM und NR bis zu ihren Schnitten T und S mit dieser Normalen und ziehe FT

und FS. Da dann die Winkel FSR und FTR Rechte sind (§ 5) und dieselben der Geraden FR gegenüber liegen, so liegen die vier Punkte F, S, T, R auf einem Kreise, dessen Durchmesser FR ist. Also ist Winkel $FST + FRT = 180^\circ$ und daher $ASF = FRT = FNS$ (§ 2). Da somit die Dreiecke FNS und FTR ähnlich sind, so wird auch Winkel $SFN = TFR$ und Winkel $SFT = NFR = SRT$. Nun ist aber (§ 1) $SNF = \frac{1}{2} NFB$ und $TMF = \frac{1}{2} MFB$, also $SNF - TMF = \frac{1}{2} NFM$; ferner im Viereck $FNRM$:

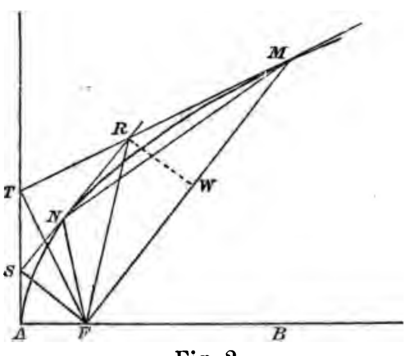


Fig. 2.

Winkel $SNF - TMF = NFM - TRS$ und daher $NFM - TRS = \frac{1}{2} NFM$ oder $SRT = \frac{1}{2} NFM = NFR$. Die Gerade FR halbirt also den Winkel NFM. Da Winkel $SNF = TRF$, so wird auch $FNR = FRM$. Somit sind in den Dreiecken FNR und FRM entsprechende Winkel gleich, sie selbst also einander ähnlich.

[4] § 8. **Zusatz 1.** Es wird also $FN : FR = FR : FM$, und *daher ist* FR *die mittlere Proportionale zwischen* FN *und* FM (vergl. § 3). Es ist auch

$$FN : FR = FR : FM = \sqrt{FN} : \sqrt{FM}.$$

§ 9. **Zusatz 2.** Wenn also der Brennpunkt F und zwei Punkte N und M der Parabel gegeben sind, so erhält man, wenn man den Winkel NFM durch die Gerade FR halbirt und $FR = \sqrt{FN \cdot FM}$ macht, sofort die Möglichkeit, die Tangenten RN und RM zu construiren; fällt man auf sie die Lote FS und FT, so erhält man die Gerade TS, welche durch den Scheitel geht, und somit diesen selbst und AF.

§ 10. **Zusatz 3.** Ebenso: wenn das Dreieck FNM gegeben ist, so ist auch Dreieck FRM bekannt und daher der Winkel RMF; also hat man nach § 4 $AF = FM \cdot \sin RMF^2$.

§ 11. **Zusatz 4.** Da $FRM = FNR$, so wird, wenn wir die Gerade FN und die Tangente NR festhalten, der

Winkel FRM ein constanter sein, welches auch die Lage von FM gegen FN sei. Hiermit ist die oben (§ 5) angegebene Construction der Parabel allgemeiner dargethan.

§ 12. **Zusatz 5.** Wird die Sehne NM gezogen, so wird die Summe der Winkel

$$RNM + RMN = TRS = NFR.$$

§ 13. **Zusatz 6.** Da ferner ist:

$$NR : RM = \sin RMN : \sin RNM$$

[5] und, weil Winkel NFM durch FR halbirt wird:

$$NR : RM = \sin RMF : \sin RNF,$$

so folgt

$$\sin RMN : \sin RNM = \sin RMF : \sin RNF.$$

§ 14. **Zusatz 7.** Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke FNR und FRM ist:

$$NR : RM = FN : FR;$$

da nun (§ 8)

$$FN : FR = \sqrt{FN} : \sqrt{FM},$$

so folgt (§ 13)

$$\sqrt{FN} : \sqrt{FM} = \sin RMF : \sin RNF.$$

§ 15. **Lemma 4.** (Fig. 3.) *Werden in drei Punkten L, M, N der Parabel die Tangenten LR, PMQ, RN gezogen, so liegen die Schnittpunkte P, R, Q derselben und der Brennpunkt F auf einem Kreise.*

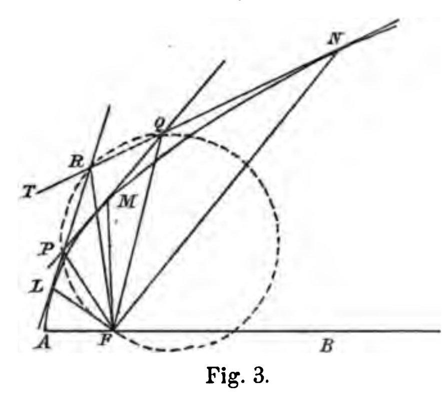


Fig. 3.

B e w e i s: Es ist nämlich (§ 7) Winkel

$$TRL = \tfrac{1}{2} LFN = \tfrac{1}{2} LFM + \tfrac{1}{2} MFN,$$

aber (§ 7)

$\tfrac{1}{2} LFM = PFM$ und $\tfrac{1}{2} MFN = MFQ$, also:

$$TRL = PFM + MFQ = PFQ.$$

Im Viereck $PRQF$ sind somit die Summen zweier gegenüberliegender Winkel $PFQ + PRQ = 180^\circ$, eine Eigenschaft,

die nur dem in einen Kreis eingeschriebenen Viereck zukommt.

[6] § 16. **Zusatz 1.** Sind daher drei Tangenten einer Parabel ihrer Lage nach gegeben, so kann durch ihre Schnittpunkte P, Q, R ein Kreis gelegt werden, der durch den Brennpunkt der Parabel hindurchgeht.

§ 17. **Zusatz 2.** Sind fernerhin vier Tangenten einer Parabel ihrer Lage nach gegeben, so können zwei solche Kreise beschrieben werden, in deren einem Schnittpunkte der Brennpunkt der Parabel liegt.

§ 18. **Lemma 5.** (Fig. 3.) *Hält man die beiden Tangenten LR und RN fest und ändert die Lage der dritten PMQ beliebig, so bleibt das Verhältniss zwischen den Abschnitten LP und RQ constant.*

Beweis: Es ist nämlich

$$\text{Winkel } LFP = \tfrac{1}{2} LFM \quad \text{und}$$

$$LFR = \tfrac{1}{2} LFN,$$

also:

$$PFR = \tfrac{1}{2} MFN = MFQ;$$

addirt man also zu beiden den Winkel RFM, so wird

$$PFM = RFQ = LFP.$$

Es ist aber auch $PLF = QRF$, also sind die Dreiecke LPF und RQF ähnlich und daher das Verhältniss zwischen LP und RQ constant.

[7] § 19. **Zusatz 1.** Es wird sonach:

$$LP : RQ = LR : RN = LF : RF$$

oder:

$$LP : RQ = \sqrt{LF} : \sqrt{NF}. \quad (\S\ 8)$$

§ 20. **Zusatz 2.** Daraus folgt auch:

$$RP : QN = \sqrt{LF} : \sqrt{NF}.$$

§ 21. **Zusatz 3.** Ferner:

$$LR = PR + \frac{RQ \cdot LR}{RN} \quad (\S\ 19)$$

oder:

$$\frac{PR}{LR} + \frac{RQ}{RN} = 1.$$

Zusatz 4.

$$MFQ \quad PFR.$$

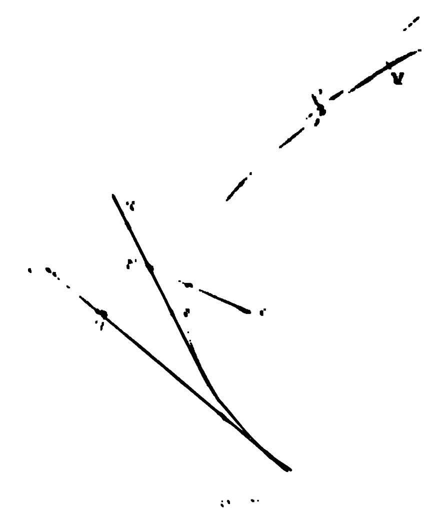
$$PFQ \quad LFR = \tfrac{1}{2} LFN.$$

$$FPM \quad FLP = FRQ.$$

... Dreiecke LRF, RNF, PFQ ähnlic

Zusatz 5. Welches also auch die Lage ... sei, immer wird, wenn die Tangente ... festgehalten werden, das Verhältniss zwischen ... PQ und FQ constant sein.

§ 24. **Lemma 6.** (Fig. 4.) *Von drei ihrer ... gegebenen Tangenten RQM, RPr und qrm einer Par... auf einer beliebigen vierten qPQ Stücke qP und ... schnitten, de... niss constan...*



Beweis ... ist nämlich ... Verhältniss ... und P ... zwisch... constant ... das ...

§ 25.

Aufgabe ...

... bestimmt. ... Bedingung ...

Brennpunkt F nach § 17 gefunden wird, und hernach können die Parabel selbst nach § 9 oder beliebig viele Tangenten derselben nach § 5 construirt werden. Alle diese letzteren aber genügen nach Satz 6 der Bedingung der Aufgabe.

Zweite Lösung. Da nach § 24

$$qP : PQ = SR : RM = rm : Sr\,,$$

so folgt

$$SR : SM = rm : mS$$

[9] oder

$$SM : Sm = SR : rm\,.$$

Es ist aber auch (§ 19)

$$SM : Sm = QM : Sq\,,$$

also:

$$SR : rm = QM : Sq\,.$$

Wenn daher das Verhältniss zwischen qP und PQ gegeben ist, so ergiebt die erste Proportion RM und rm und daher die Lage der Berührungspunkte M und m. Wird weiter der Abschnitt QM beliebig angenommen, so steht dieser zu Sq in dem constanten Verhältniss $SR : rm$. Zu jedem beliebigen Punkte Q wird also der entsprechende q gefunden werden können, so dass die Gerade Qq gezogen werden kann.

Dritte Lösung. Da

$$Pq : \sin qrP = qr : \sin qPr$$

$$PQ : \sin QRP = QR : \sin QPR$$

und

$$\text{Winkel } qPr = QPR\,,$$

so wird

$$Pq : PQ = \frac{qr \cdot \sin qrP}{\sin qPr} : \frac{QR \cdot \sin QRP}{\sin qPr}\,,$$

also:

$$\frac{PQ}{Pq} \sin qrP : \sin QRP = QR : qr = \frac{PQ}{Pq} : \frac{Sr}{SR}\,.$$

Wird also QR angenommen, so ist hiernach qr gegeben und umgekehrt.

§ 26. **Lemma 8. Aufgabe 2.** (Fig. 5.) *Man soll die Parabel construiren, wenn zwei ihrer Punkte M und N und der Brennpunkt F gegeben sind.*

sich, dass die schönsten Eigenschaften desselben sich mit geringen Aenderungen verallgemeinern lassen; so stellt sich oft eine schwierige Sache, wenn gehörig durchgeführt, als leicht heraus. Auch deshalb kann eine Sache oft nicht in Fluss gebracht werden, weil sie durch zu viele Nebenumstände verhüllt ist, und erst wenn sie ganz durchschaut ist, erkennt man diese als fremd oder willkürlich.

Beispiele für diese Behauptungen will ich aus anderen Wissenschaften nicht vorbringen, da man ihrer in dem vor- [**VI**] liegenden Werke genug findet. Ich habe darin die *wichtigsten Eigenschaften der Cometenbewegung* auf dieselbe Weise entwickelt wie vor drei Jahren die der Lichtstrahlen auf ihrem Wege durch mehrere durchsichtige, sphärische und concentrische Medien (»Les propriétés remarquables de la route de la lumière par les airs etc.« A la Haye 1758).

Methoden, eine Cometenbahn aus drei geocentrischen Beobachtungen durch Versuche, Construction oder Messung zu ermitteln, kennt man schon viele; wer meine Vorgänger kennt, wird daher glauben, es werde hier eine alte Sache nochmals abgewandelt. Ich gebe auch zu, dass ich sehr berühmte Vorgänger habe, aber doch eben nur Pfadfinder, die von den Quellen an sprungweise dahin gelangt sind, wohin eine gute Theorie auf einem schönen Wege hätte führen müssen. Die ersten Principien und Gesetze des Himmels ausgenommen, blieben sie von dem eigentlichen Problem, das hier unser Hauptziel ist, nämlich die Bahn aus drei Beobachtungen zu entwickeln, [**VII**] sehr weit entfernt. Musste es nicht auffallen, dass die schönen Eigenschaften der Kegelschnitte, die durch den Wetteifer der grössten Geometer aller Zeiten erforscht wurden, ganz unnütz sein sollten, sobald es sich um Cometenbahnen handelte? Das war doch unter allen Umständen des Versuches werth und keine eitle Hoffnung, und der Erfolg hat denn auch gezeigt, dass jene schönen Eigenschaften nur noch schöner hervortreten, wenn man sie auf die Cometenbahnen in der Weise anwendet, dass man an Stelle der Flächen die Zeit setzt. Ich habe diejenigen Sätze, welche die Kegelschnitte unabhängig von den Cometenbahnen betreffen, um ihre allgemeinere Bedeutung hervorzuheben, mit »*Lemma*« bezeichnet und sie so von den übrigen, die sich auf die Cometenbahnen beziehen, unterschieden. Die schon bekannten Sätze habe ich unter die neuen eingereiht, damit der Zusammenhang klarer hervortrete. Von dem Neuen habe ich jedoch nur das vorgebracht, was

mir schön erschien, und dann solches, was Weiterforschenden den Weg weisen konnte, wie ich immer gleich angedeutet [VIII] habe. Ich meine hier z. B. die Ueberlegungen über die orthographische Projection auf die Ebene der Ekliptik oder eine andere zweckmässig gewählte Ebene; dann gewisse Sätze im ersten der eigentlichen Abhandlung vorausgehenden Theile, und solche im vierten Theile, wo ich kurz den Unterschied zwischen parabolischen, elliptischen und hyperbolischen Bahnen berühre. Mein Hauptziel war die parabolische Bahn; hier sind die Sätze und Aufgaben so einleuchtend, dass ich auch der Beispiele nicht bedurfte, die man sonst hinzufügt. Die elliptischen Bahnen habe ich im vierten Theile nur so weit ausgeführt, dass man den Zusammenhang der schönsten Eigenschaften der parabolischen Bahn mit den entsprechenden der anderen Kegelschnitte klar durchschauen konnte. Wer auf diesem Gebiete sich gründlicher belehren will, muss zu dem ausgezeichneten Werke von *Euler* »*Theoria motuum Planetarum et Cometarum*« greifen.

Erster Theil.

Allgemeinere vorbereitende Sätze über die Parabel.

[1] § 1. **Lemma 1.** (Fig. 1.) *Wird in der Parabel AN, deren Axe AF und deren Brennpunkt F ist, ein beliebiger Radius-*

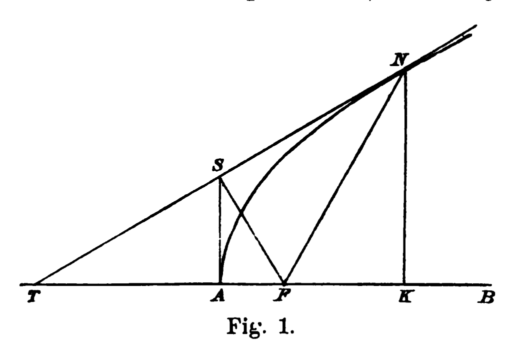


Fig. 1.

vector FN gezogen und in seinem Endpunkt die Tangente NT, so ist Winkel $TNF = \frac{1}{2}NFB$.

Beweis: Da nach der Natur der Parabel $FT = FN$ ist, so wird Winkel $FTN = TNF$; nun ist $FTN + TNF = NFB$, also $TNF = \frac{1}{2} NFB$.

§ 2. **Lemma 2.** (Fig. 1.) *Wird im Scheitel A der Parabel das Lot AS zur Axe errichtet, welches die Tangente TN in S schneidet, und wird S mit dem Brennpunkte F verbunden, so wird der Winkel AFN durch FS halbirt und die Dreiecke AFS und FSN werden ähnlich.*

[2] Beweis: Da nämlich $TS = SN$ und $FT = FN$, so wird Winkel $TFS = SFN$. Ferner steht FS auf der Tangente TN senkrecht und das Dreieck FSN ist somit rechtwinklig. Da aber Winkel SAF ein Rechter ist, so ist auch das Dreieck FAS rechtwinklig. Wegen der Gleichheit der Winkel AFS und SFN haben also beide Dreiecke gleiche Winkel, sind somit ähnlich.

§ 3. **Zusatz 1.** Es ist also: $AF : FS = FS : FN$ oder *FS ist die mittlere Proportionale zwischen FA und FN.*

§ 4. **Zusatz 2.** Da Winkel $ASF = SNF$; so wird $AF = SF \cdot \sin ASF = SF \cdot \sin SNF = FN \cdot \sin FNT^2$. *Ist daher der Radiusvector FN gegeben und der Winkel FNT, so wird daraus sehr leicht der Abstand des Brennpunktes vom Scheitel AF und die Lage der Axe gefunden.*

§ 5. **Zusatz 3.** Da der Winkel FSN constant ein Rechter ist, so können, wenn der Brennpunkt F und die Gerade AS ihrer Lage nach gegeben sind, *durch Ziehen von Normalen zu den Verbindungslinien von F mit beliebigen Punkten S beliebig viele die Parabel einhüllende Tangenten construirt werden.*

§ 6. **Anmerkung.** Die folgenden Sätze sind längst bekannt und können mit wenig Aenderungen auf die anderen [3] Kegelschnitte angewendet werden; in Bezug auf die Parabel mögen sie wie folgt dargelegt werden.

§ 7. **Lemma 3.** (Fig. 2.) *Wenn an zwei Punkte N und M der Parabel die Tangenten NR und RM gelegt und vom Brennpunkte F die Geraden FN, FM, FR gezogen werden, so sind die Dreiecke FNR und FRM ähnlich und, wenn die Tangente MR bis T verlängert wird, ist der Winkel $TRN = NFR = RFM$.*

Beweis: Man errichte im Scheitel A die Normale AT zur Axe AF, verlängere die Tangenten RM und NR bis zu ihren Schnitten T und S mit dieser Normalen und ziehe FT

und FS. Da dann die Winkel FSR und FTR Rechte sind (§ 5) und dieselben der Geraden FR gegenüber liegen, so liegen die vier Punkte F, S, T, R auf einem Kreise, dessen Durchmesser FR ist. Also ist Winkel $FST + FRT = 180°$ und daher $ASF = FRT = FNS$ (§ 2). Da somit die Dreiecke FNS und FTR ähnlich sind, so wird auch Winkel $SFN = TFR$ und Winkel $SFT = NFR = SRT$. Nun ist aber (§ 1) $SNF = \frac{1}{2} NFB$ und $TMF = \frac{1}{2} MFB$, also $SNF - TMF = \frac{1}{2} NFM$; ferner im Viereck $FNRM$:

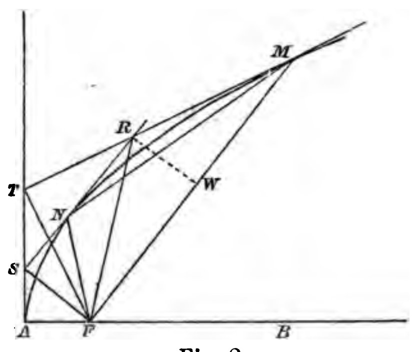


Fig. 2.

Winkel $SNF - TMF = NFM - TRS$ und daher $NFM - TRS = \frac{1}{2} NFM$ oder $SRT = \frac{1}{2} NFM = NFR$. Die Gerade FR halbirt also den Winkel NFM. Da Winkel $SNF = TRF$, so wird auch $FNR = FRM$. Somit sind in den Dreiecken FNR und FRM entsprechende Winkel gleich, sie selbst also einander ähnlich.

[4] § 8. **Zusatz 1.** Es wird also $FN : FR = FR : FM$, und *daher ist FR die mittlere Proportionale zwischen FN und FM* (vergl. § 3). Es ist auch

$$FN : FR = FR : FM = \sqrt{FN} : \sqrt{FM}.$$

§ 9. **Zusatz 2.** Wenn also der Brennpunkt F und zwei Punkte N und M der Parabel gegeben sind, so erhält man, wenn man den Winkel NFM durch die Gerade FR halbirt und $FR = \sqrt{FN \cdot FM}$ macht, sofort die Möglichkeit, die Tangenten RN und RM zu construiren; fällt man auf sie die Lote FS und FT, so erhält man die Gerade TS, welche durch den Scheitel geht, und somit diesen selbst und AF.

§ 10. **Zusatz 3.** Ebenso: wenn das Dreieck FNM gegeben ist, so ist auch Dreieck FRM bekannt und daher der Winkel RMF; also hat man nach § 4 $AF = FM \cdot \sin RMF^2$.

§ 11. **Zusatz 4.** Da $FRM = FNR$, so wird, wenn wir die Gerade FN und die Tangente NR festhalten, der

Winkel FRM ein constanter sein, welches auch die Lage von FM gegen FN sei. Hiermit ist die oben (§ 5) angegebene Construction der Parabel allgemeiner dargethan.

§ 12. **Zusatz 5.** Wird die Sehne NM gezogen, so wird die Summe der Winkel

$$RNM + RMN = TRS = NFR.$$

§ 13. **Zusatz 6.** Da ferner ist:

$$NR : RM = \sin RMN : \sin RNM$$

[5] und, weil Winkel NFM durch FR halbirt wird:

$$NR : RM = \sin RMF : \sin RNF,$$

so folgt

$$\sin RMN : \sin RNM = \sin RMF : \sin RNF.$$

§ 14. **Zusatz 7.** Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke FNR und FRM ist:

$$NR : RM = FN : FR;$$

da nun (§ 8)

$$FN : FR = \sqrt{FN} : \sqrt{FM},$$

so folgt (§ 13)

$$\sqrt{FN} : \sqrt{FM} = \sin RMF : \sin RNF.$$

§ 15. **Lemma 4.** (Fig. 3.) *Werden in drei Punkten L, M, N der Parabel die Tangenten LR, PMQ, RN gezogen, so liegen die Schnittpunkte P, R, Q derselben und der Brennpunkt F auf einem Kreise.*

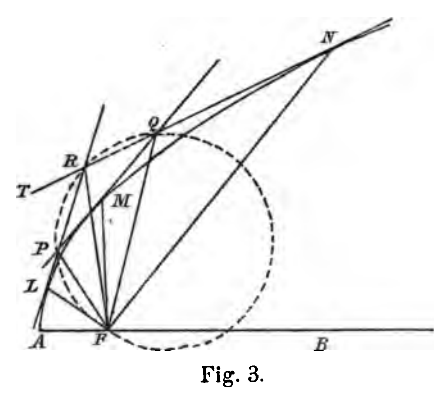


Fig. 3.

Beweis: Es ist nämlich (§ 7) Winkel

$$TRL = \tfrac{1}{2} LFN$$
$$= \tfrac{1}{2} LFM + \tfrac{1}{2} MFN,$$

aber (§ 7)

$\tfrac{1}{2} LFM = PFM$ und $\tfrac{1}{2} MFN = MFQ$, also:

$$TRL = PFM + MFQ$$
$$= PFQ.$$

Im Viereck $PRQF$ sind somit die Summen zweier gegenüberliegender Winkel $PFQ + PRQ = 180^\circ$, eine Eigenschaft,

die nur dem in einen Kreis eingeschriebenen Viereck zukommt.

[6] § 16. **Zusatz 1.** Sind daher drei Tangenten einer Parabel ihrer Lage nach gegeben, so kann durch ihre Schnittpunkte P, Q, R ein Kreis gelegt werden, der durch den Brennpunkt der Parabel hindurchgeht.

§ 17. **Zusatz 2.** Sind fernerhin vier Tangenten einer Parabel ihrer Lage nach gegeben, so können zwei solche Kreise beschrieben werden, in deren einem Schnittpunkte der Brennpunkt der Parabel liegt.

§ 18. **Lemma 5.** (Fig. 3.) *Hält man die beiden Tangenten LR und RN fest und ändert die Lage der dritten PMQ beliebig, so bleibt das Verhältniss zwischen den Abschnitten LP und RQ constant.*

Beweis: Es ist nämlich

$$\text{Winkel } LFP = \tfrac{1}{2} LFM \quad \text{und}$$

$$LFR = \tfrac{1}{2} LFN,$$

also:

$$PFR = \tfrac{1}{2} MFN = MFQ;$$

addirt man also zu beiden den Winkel RFM, so wird

$$PFM = RFQ = LFP.$$

Es ist aber auch $PLF = QRF$, also sind die Dreiecke LPF und RQF ähnlich und daher das Verhältniss zwischen LP und RQ constant.

[7] § 19. **Zusatz 1.** Es wird sonach:

$$LP : RQ = LR : RN = LF : RF$$

oder:

$$LP : RQ = \sqrt{LF} : \sqrt{NF}. \quad (\S\ 8)$$

§ 20. **Zusatz 2.** Daraus folgt auch:

$$RP : QN = \sqrt{LF} : \sqrt{NF}.$$

§ 21. **Zusatz 3.** Ferner:

$$LR = PR + \frac{RQ \cdot LR}{RN} \quad (\S\ 19)$$

oder:

$$\frac{PR}{LR} + \frac{RQ}{RN} = 1.$$

§ 22. **Zusatz 4.** Da man hat:

$$PFM = LFP$$

und

$$MFQ = PFR,$$

so folgt durch Addition:

$$PFQ = LFR = \tfrac{1}{2} LFN.$$

Es ist aber auch:

$$FPM = FLP = FRQ.$$

Also sind die Dreiecke LRF, RNF, PFQ ähnlich.

§ 23. **Zusatz 5.** Welches also auch die Lage der Tangente PMQ sei, immer wird, wenn die Tangenten LR und RN festgehalten werden, das Verhältniss zwischen den Seiten FP, PQ und FQ constant sein.

[8] § 24. **Lemma 6.** (Fig. 4.) *Von drei ihrer Lage nach gegebenen Tangenten RQM, RPr und qrm einer Parabel werden auf einer beliebigen vierten qPQ Stücke qP und PQ abgeschnitten, deren Verhältniss constant ist.*

Fig. 4.

Beweis: Nach § 23 ist nämlich sowohl das Verhältniss zwischen PF und PQ als auch jenes zwischen PF und Pq constant, also muss auch das zwischen Pq und PQ constant sein.

§ 25. **Lemma 7. Aufgabe 1.** (Fig. 4.) *Wenn drei Gerade Rr, RQ, rq ihrer Lage nach gegeben sind, eine vierte qQ so zu legen, dass die Abschnitte qP und PQ in einem gegebenen Verhältniss stehen.*

Erste Lösung. Die Aufgabe ist unbestimmt. Wenn eine einzige Gerade qQ gezogen ist, die der Bedingung genügt, so liegen vier Tangenten einer Parabel vor, mit deren Hülfe der

Brennpunkt F nach § 17 gefunden wird, und hernach können die Parabel selbst nach § 9 oder beliebig viele Tangenten derselben nach § 5 construirt werden. Alle diese letzteren aber genügen nach Satz 6 der Bedingung der Aufgabe.

Zweite Lösung. Da nach § 24

$$qP : PQ = SR : RM = rm : Sr\,,$$

so folgt

$$SR : SM = rm : mS$$

[9] oder

$$SM : Sm = SR : rm\,.$$

Es ist aber auch (§ 19)

$$SM : Sm = QM : Sq\,,$$

also:

$$SR : rm = QM : Sq\,.$$

Wenn daher das Verhältniss zwischen qP und PQ gegeben ist, so ergiebt die erste Proportion RM und rm und daher die Lage der Berührungspunkte M und m. Wird weiter der Abschnitt QM beliebig angenommen, so steht dieser zu Sq in dem constanten Verhältniss $SR : rm$. Zu jedem beliebigen Punkte Q wird also der entsprechende q gefunden werden können, so dass die Gerade Qq gezogen werden kann.

Dritte Lösung. Da

$$Pq : \sin qrP = qr : \sin qPr$$

$$PQ : \sin QRP = QR : \sin QPR$$

und

$$\text{Winkel } qPr = QPR\,,$$

so wird

$$Pq : PQ = \frac{qr \cdot \sin qrP}{\sin qPr} : \frac{QR \cdot \sin QRP}{\sin qPr}\,,$$

also:

$$\frac{PQ}{Pq} \sin qrP : \sin QRP = QR : qr = \frac{PQ}{Pq} : \frac{Sr}{SR}\,.$$

Wird also QR angenommen, so ist hiernach qr gegeben und umgekehrt.

§ 26. **Lemma 8. Aufgabe 2.** (Fig. 5.) *Man soll die Parabel construiren, wenn zwei ihrer Punkte M und N und der Brennpunkt F gegeben sind.*

[10] Lösung: Mit MN als Durchmesser wird ein Halbkreis MVN beschrieben, dann mache man $Fn = FN$ und erhalte die Differenz nM; diese wird aus N nach V übertragen, so dass die Sehne $NV = nM$ wird. Dann wird MVH gezogen und darauf aus F die Normale FH gefällt. Diese wird die Axe der Parabel sein. Endlich macht man

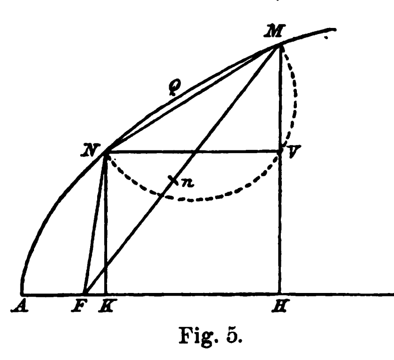


Fig. 5.

$$AF = \tfrac{1}{2}(FM - FH)$$

und A wird der Scheitel der Parabel sein. Mit diesen Stücken aber kann die Construction der Parabel leicht ausgeführt werden.

Beweis: In der Parabel ist:

$$FM = FH + 2AF$$
$$FN = FK + 2AF,$$

also

$$FM - FN = FH - FK = HK = NV.$$

Da aber der Winkel NVM ein Rechter ist, so spannt die Sehne NM den Halbkreis NVM und NV ist der Axe AH parallel.

§ 27. **Anmerkung.** Eine andere Lösung des Problems haben wir schon oben (§ 9) angegeben.

§ 28. **Lemma 9. Aufgabe 3.** (Fig. 5.) *Gegeben ist das Dreieck NFM; man soll die Fläche des Segmentes NQM ermitteln.*

Lösung: Es sei p der Parameter der Parabel und es werde gesetzt:

$$AH = x \quad HM = y$$
$$AK = \xi \quad KN = \eta,$$

[11] dann wird die Fläche

des Segmentes $AMH = \frac{2}{3}xy$
des Segmentes $ANK = \frac{2}{3}\xi\eta$
des Vierecks $KNMH = \frac{1}{2}(x - \xi)(y + \eta)$,

also wird die Fläche

$$\text{des Segmentes } NQM = \tfrac{2}{3}xy - \tfrac{2}{3}\xi\eta - \tfrac{1}{2}(x-\xi)(y+\eta)$$

oder nach gehöriger Reduction:

$$= \tfrac{1}{6}(xy - \xi\eta - 3x\eta + 3y\xi)\,.$$

Nun ist aber:

$$x = \frac{y^2}{p}, \quad \xi = \frac{\eta^2}{p},$$

also, nach Substitution, die Fläche des Segmentes NQM

$$B = \frac{1}{6p}(y^3 - 3y^2\eta + 3y\eta^2 - \eta^3)$$

oder

$$B = \frac{(y-\eta)^3}{6p} = \frac{MV^3}{24AF}\,.$$

Es hängt also die Fläche des Segmentes NQM einzig und allein von der Differenz der Ordinaten KN und HM und von dem Abstande des Brennpunktes vom Scheitel ab.

Sei nun

$$FM = a\,, \quad FN = b$$
$$\text{Winkel } NFM = 2c$$
$$NM = k\,,$$

so wird

$$2ab\cos 2c = a^2 + b^2 - k^2$$

oder, da

$$\cos 2c = 1 - 2\sin c^2\,,$$

$$4ab\sin c^2 = k^2 - (a-b)^2 = MV^2$$

$$MV = 2\sqrt{ab}\sin c\,.$$

Weiter ist (§ 8) (Fig. 2)

$$FR = \sqrt{ab}\,,$$

[12] also:

$$RW = \sqrt{ab}\sin c$$
$$MW = a - \sqrt{ab}\cos c$$
$$\sin RMW^2 = \frac{b\sin c^2}{a+b-2\sqrt{ab}\cos c}\,.$$

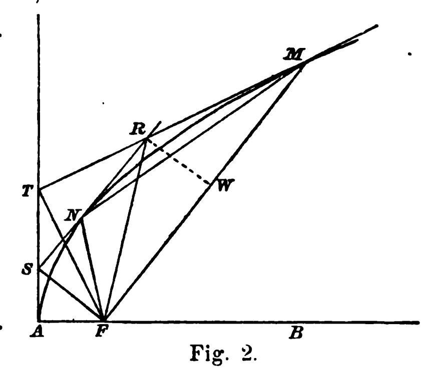


Fig. 2.

Ferner ist (§ 4)

$$AF = FM \sin RMW^2$$

also:

$$AF = \frac{ab \sin c^2}{a + b - 2\sqrt{ab}\cos c}$$

und daher wegen $B = \frac{MV^3}{24AF}$ (Fig. 5) und $MV = 2\sqrt{ab}\sin c$

$$B = \tfrac{1}{3}\sqrt{ab}\,(a + b - 2\sqrt{ab}\cos c)\sin c\,.$$

§ 29. **Zusatz.** (Fig. 5.) Hieraus wird nun leicht die Fläche des parabolischen Sectors $NFMQ$ gefunden, indem man dem Segmente NQM die Fläche des Dreiecks FNM, welche ist:

$$\tfrac{1}{2} ab \sin 2c = ab \sin c \cos c\,,$$

hinzufügt. Nennt man die Fläche des genannten Sectors A, so wird man erhalten

$$A = \tfrac{1}{3}\sqrt{ab}\,(a + b)\sin c + \tfrac{1}{3} ab \sin c \cos c$$

oder

$$A = \tfrac{1}{3}\sqrt{ab}\,(a + b + \sqrt{ab}\cos c)\sin c\,.$$

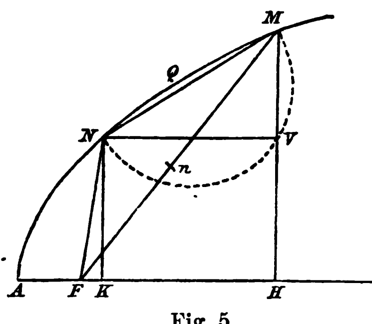


Fig. 5.

§ 30. **Lemma 10. Aufgabe 4.** (Fig. 5.) *Gegeben sind die Seiten des Dreiecks NFM; man soll die Entfernung des Brennpunktes F vom Scheitel A und die Fläche des parabolischen Sectors NFM finden.*

Lösung: Nach trigonometrischen Formeln hat man:

$$4ab \sin c^2 = (k + a - b)(k - a + b) = k^2 - (a - b)^2$$
$$4ab \cos c^2 = (k + a + b)(a + b - k) = (a + b)^2 - k^2\,.$$

[13] Da nun ist (§ 28, 29)

$$AF = \frac{ab \sin c^2}{a + b - 2\sqrt{ab}\cos c}$$

$$A = \tfrac{1}{3}\sqrt{ab}\,(a + b + \sqrt{ab}\cos c)\sin c\,,$$

so folgt durch Substitution:

$$AF = \frac{k^2 - (a-b)^2}{4(a+b-\sqrt{(a+b)^2 - k^2})}$$

$$A = \tfrac{1}{6}\sqrt{k^2 - (a-b)^2}\,(a+b+\tfrac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2 - k^2})\,.$$

§ 31. **Zusatz 1.** Da

$$(a+b) - \sqrt{(a+b)^2 - k^2} = \frac{k^2}{a+b+\sqrt{(a+b)^2 - k^2}},$$

so hat man auch:

$$AF = \frac{(k^2 - (a-b)^2)(a+b+\sqrt{(a+b)^2 - k^2})}{4k^2}\,.$$

§ 32. **Zusatz 2.** Wenn der Winkel $c = \frac{1}{2}NFM$ gleich 90^0 wird, so wird $k = a + b$ und daher in diesem Falle:

$$AF = \frac{ab}{a+b} = \frac{ab}{k}$$

$$A = \tfrac{1}{3}(a+b)\sqrt{ab} = \tfrac{1}{3}k\sqrt{ab}\,.$$

§ 33. **Anmerkung.** Die Buchstaben a, b, c, k, von denen wir in den vorhergehenden Sätzen Gebrauch gemacht haben, werden wir im Folgenden in der gleichen Bedeutung beibehalten, ohne dieselbe immer zu wiederholen.

[14] § 34. **Lemma 11. Aufgabe 5.** (Fig. 2.) *Gegeben sind die Seiten des Dreieckes NFM; man soll den Winkel RMF bez. SNF finden.*

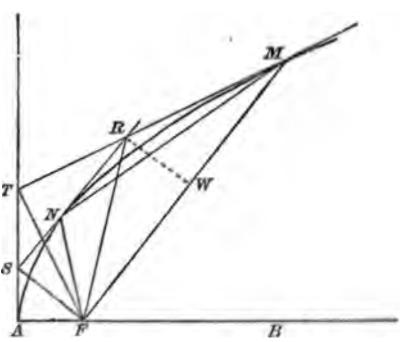


Fig. 2.

Lösung: Da nach § 28:

$$\sin RMF^2 = \frac{b \sin c^2}{a + b - 2\sqrt{ab}\cos c}$$

und nach § 30:

$$4ab \sin c^2 = k^2 - (a-b)^2$$

$$4ab \cos c^2 = (a+b)^2 - k^2\,,$$

so erhält man nach durchgeführter Substitution:

$$\sin RMF^2 = \frac{k^2 - (a-b)^2}{4a(a+b-\sqrt{(a+b)^2 - k^2})}$$

und auf ähnliche Weise (§ 14)

$$\sin SNF^2 = \frac{k^2 - (a-b)^2}{4b(a+b-\sqrt{(a+b)^2 - k^2})}.$$

§ 35. **Zusatz 1.** Da nach § 1

$$\text{Winkel } MFB = 2RMF,$$

so wird

$$\cos MFB = 1 - 2\sin RMF^2$$

und daher

$$\cos MFB = 1 - \frac{k^2 - (a-b)^2}{2a(a+b-\sqrt{(a+b)^2 - k^2})}.$$

§ 36. **Zusatz 2.** Wenn der Winkel $NFM = 180^\circ$ wird, so wird $a + b = k$ und daher

$$\cos MFB = 1 - \frac{2b}{a+b} = \frac{a-b}{a+b}.$$

[15] § 37. **Anmerkung.** Der Winkel RMF und zudem der Winkel RMN können auch noch auf andere Weise durch a, b, c ausgedrückt werden, wenn man die Cotangente derselben sucht. Es ist nämlich:

$$FRM = 180^\circ - c - RMF,$$

also:

$$\frac{FR}{FM} = \frac{\sin RMF}{\sin(RMF + c)}.$$

Nun ist aber nach § 8

$$FR : FM = \sqrt{b} : \sqrt{a}.$$

Nennen wir also den Winkel $RMF = v$, so wird sein

$$\sqrt{b} : \sqrt{a} = \sin v : \sin(v + c),$$

oder wegen $\sin(v + c) = \sin v \cos c + \cos v \sin c$:

$$\sqrt{b} : \sqrt{a} = \sin v : (\sin v \cos c + \cos v \sin c)$$

$$\sqrt{b} : \sqrt{a} = \frac{1}{\sin c \operatorname{cotg} v + \cos c}.$$

Hieraus folgt:

$$\operatorname{cotg} v = \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{cosec} c - \operatorname{cotg} c.$$

Weiter hat man, wenn man den Winkel $RMN = \omega$ nennt, wegen $TRN = RFM = c$, (§ 7):

$$MNR = c - \omega$$

und daher

$$NR : RM = \sin \omega : \sin (c - \omega).$$

Nun ist aber nach § 14

$$NR : RM = \sqrt{b} : \sqrt{a},$$

also:

$$\sqrt{b} : \sqrt{a} = \sin \omega : \sin (c - \omega)$$

oder:

$$\sqrt{b} : \sqrt{a} = \sin \omega : (\sin c \cos \omega - \cos c \sin \omega).$$

Hieraus wird:

$$\operatorname{cotg} \omega = \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{cosec} c + \operatorname{cotg} c.$$

[16] Da aber

$$\operatorname{cotg} v = \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{cosec} c - \operatorname{cotg} c,$$

so erhellt, dass man nur durch Wechsel des Zeichens durch dieselbe Formel sowohl die cotg von v als jene von ω erhalten kann.

§ 38. **Lemma 12.** (Fig. 6.) *Wenn man durch die Mitte G der Sehne NM eine Parallele $RQGW$ zur Axe und die auf dieser Geraden sich schneidenden Tangenten RN und RM an die Endpunkte der Sehne zieht, so wird, wenn noch Q mit dem Brennpunkte F durch die Gerade QEF verbunden wird, $RQ = QG = QE$.*

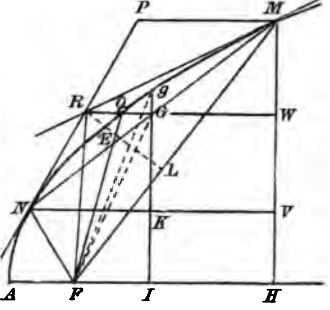


Fig. 6.

Beweis: Wird die Tangente in N von der durch M zur Axe parallel gelegten Geraden MP in P getroffen, so folgt aus den Eigenschaften der Parabel:

$$RQ : PM = NR^2 : NP^2.$$

Es ist aber auch

$$NR : NP = NG : NM = 1 : 2,$$

also

$$RQ : PM = 1 : 4;$$

und ferner:

$$RG : PM = 1 : 2,$$

also

$$RQ : RG = 1 : 2$$

und daher:

$$RQ = QG.$$

Nun ist ferner die Gerade, welche die Parabel in Q berührt, der Sehne NM parallel und gegen die Geraden QF und QG gleich geneigt, also wird

$$\text{Winkel } QEG = QGE$$

und daher

$$QE = QG = RQ.$$

[17] § 39. **Anmerkung.** Man kann eine Beziehung zwischen FQ, QG und NM nachweisen, nämlich:

$$NM^2 = 16 FQ \cdot QG.$$

Aehnlich findet man:

$$NP^2 = 16 FN \cdot QR = 16 FN \cdot QG;$$

und man hat daher

$$NP : NM = \sqrt{FN} : \sqrt{FQ}$$

oder

$$NR : NG = \sqrt{FN} : \sqrt{FQ}.$$

§ 40. **Lemma 13.** (Fig. 6.) *Wenn durch die Mitte G der Sehne NM die zur Axe senkrechte Ordinate JGg gezogen und g mit F verbunden wird, so ist* $gF = \frac{FN + FM}{2}$.

Beweis: Es ist nämlich

$$Fg - FN = NK$$
$$FM - Fg = KV = NK,$$

also:

$$Fg - FN = FM - Fg$$

oder

$$Fg = \frac{FM + FN}{2}.$$

§ 41. **Anmerkung.** Dieser Satz wird sehr viel gebraucht und ist auch auf die anderen Kegelschnitte anwendbar.

[**18**] § 42. **Lemma 14.** (Fig. 6.) *Wenn* FQ, QG *und* Fg *wie in den beiden vorausgehenden Sätzen gezogen werden, so ist* $Fg = FQ + QG$.

Beweis: Es ist nämlich:

$$GW = IH = FM - Fg$$

$$QW = FM - FQ.$$

Also durch Subtraction:

$$QW - GW = Fg - FQ = QG$$

und daher

$$Fg = FQ + QG.$$

§ 43. **Zusatz.** Weil $QE = QG$ (§ 38), so ist auch:

$$Fg = FQ + QE.$$

§ 44. **Lemma 15. Aufgabe 6.** (Fig. 6.) *Gegeben sind die Seiten des Dreieckes* FNM; *man soll die Distanz* FQ *ermitteln.*

Lösung: Da nach § 42 und 40:

$$Fg = FQ + QG = \frac{FN + FM}{2}$$

und weiter nach § 39

$$NM^2 = 16 FQ \cdot QG,$$

so wird

$$FQ + \frac{NM^2}{16 FQ} = \frac{FN + FM}{2}.$$

[**19**] Nennt man also $FQ = q$, so wird

$$q = \frac{a+b}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b)^2 - k^2}.$$

§ 45. **Anmerkung.** Nach Aenderung des Zeichens giebt dieselbe Formel QE:

$$QE = QG = \frac{a+b}{4} - \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b)^2 - k^2}.$$

§ 46. **Zusatz 1.** Hieraus folgt:

$$FQ - QE = FE = \tfrac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2 - k^2}.$$

§ 47. **Zusatz 2.** Es ist nach § 30

$$(a+b)^2 - k^2 = 4ab\cos c^2;$$

also:

$$FE = \sqrt{ab}\cos c = FR\cdot\cos RFM \quad (\S\ 8).$$

§ 48. **Lemma 16.** (Fig. 6.) *Wird von R das Lot RL auf FM gefällt, so ist $FL = FE$ und $RL = GK$.*

Beweis: Es ist nämlich (§ 8)

$$FR = \sqrt{ab}$$

$$\text{Winkel } RFM = c,$$

also:

$$FL = \sqrt{ab}\cos c$$

$$RL = \sqrt{ab}\sin c.$$

[20] Da aber ferner (§ 30, 47)

$$\sqrt{ab}\sin c = \tfrac{1}{2}\sqrt{k^2 - (a-b)^2} = \tfrac{1}{2}MV = GK$$

$$\sqrt{ab}\cos c = FE,$$

so folgt

$$FL = FE \quad \text{und} \quad RL = GK.$$

§ 49. **Lemma 17.** (Fig. 7.) *Wenn drei beliebige Punkte N, Q, M der Parabel und ihr Brennpunkt durch die Geraden FN, FQ, FM, NQ, QM, NM verbunden werden, so verhalten sich die Flächen der Dreiecke NFQ und QFM wie die Abschnitte NE und EM und die Segmente NMQ, NQ und QM verhalten sich wie die Cuben der Geraden NM, NG, GM, wobei QG parallel zur Axe gezogen ist.*

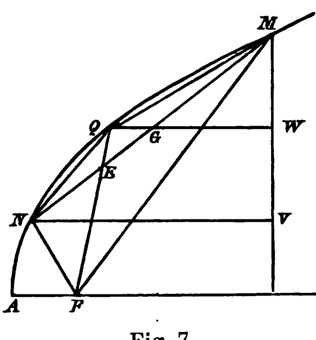


Fig. 7.

Beweis: Die Dreiecke NQE und EQM sind, da sie die gleiche Spitze Q haben, gleich hoch und ihre Flächen verhalten sich also

wie ihre Grundlinien NE und EM; ebenso sind die Dreiecke NEF und EFM, da sie die Spitze F gemeinsam haben, gleich hoch und sie verhalten sich daher ebenfalls wie NE zu EM; also durch Zusammensetzen:

$$\triangle NFQ : \triangle QFM = NE : EM.$$

Zieht man sodann NV parallel zur Axe und fällt darauf von M das Lot MV, so werden nach § 28 die Flächen der Segmente:

$$\text{Segm. } NMQ = \frac{\overline{MV}^3}{24\overline{AF}}$$

$$\text{Segm. } NQ = \frac{\overline{VW}^3}{24\overline{AF}}$$

$$\text{Segm. } QM = \frac{\overline{MW}^3}{24\overline{AF}},$$

also:

$$NMQ : \overline{MV}^3 = NQ : \overline{VW}^3 = QM : \overline{MW}^3.$$

[21] Diese Abscissen MV, VW und MW verhalten sich aber wie NM, NG und GM, also ist der Satz bewiesen.

§ 50. **Anmerkung.** Wenn der Winkel NFM 20 bis 30 Grad nicht überschreitet, dann kann man die Segmente NQ und QM im Verhältniss zu den Flächen der Dreiecke NFQ und QFM, zu denen sie gehören, ihrer Kleinheit halber vernachlässigen, so dass die Sectoren NFQ und QFM sehr nahe im Verhältniss der Abschnitte NE und EM stehen werden, welche auf der zum ganzen Bogen NM gehörigen Sehne von FQ gemacht werden.

§ 51. **Lemma 18. Aufgabe 7.** (Fig. 8.) *Gegeben seien vier Gerade BL, BI, DK, DH; man soll eine fünfte LH so ziehen,*

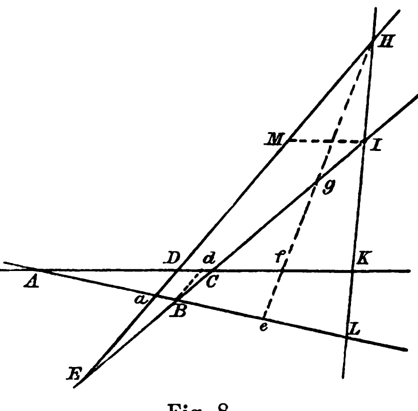


Fig. 8.

dass die Abschnitte HI, IK, KL in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

Erste Lösung. In dem Dreiecke ABC, welches von den in I, K, L schneidenden Geraden gebildet wird, bestimme man auf AB den Punkt e durch

$$AB : Be = KI : IH$$

und hierauf auf BC den Punkt g durch

$$BC : Cg = LK : KH$$

oder auf AC den Punkt f durch

$$AC : Cf = LI : IH.$$

Die Punkte e, g, f liegen dann auf einer Geraden, welche die vierte gegebene Gerade ED in dem Punkte H treffe. Dann bestimme man den Punkt M durch

$$HD : DM = HK : IK.$$

Wird schliesslich durch M eine Parallele zu AC gezogen, so wird diese BC in I treffen und HI wird die gesuchte Gerade sein (siehe § 52).

[**22**] Zweite Lösung. Durch Trigonometrie hat man:

$$\frac{\sin CKI}{AL} = \frac{\sin BAD}{KL}$$
$$\frac{\sin CKI}{DH} = \frac{\sin ADE}{HK}$$
$$\frac{\sin CIK}{EH} = \frac{\sin DEB}{HI}$$
$$\frac{\sin CIK}{BL} = \frac{\sin ABE}{IL}.$$

Hieraus kommt:

$$\frac{AL \sin BAD}{KL} = \frac{DH \sin ADE}{HK}$$
$$\frac{EH \sin DEB}{HI} = \frac{BL \sin ABE}{IL}.$$

Macht man nun

$$KL : HK = 1 : m$$
$$HI : IL \;= 1 : n$$

so wird sein:

$$m(AB + BL) \sin BAD = DH \sin ADE$$
$$n(ED + DH) \sin DEB = BL \sin ABE.$$

Hieraus folgt aber

$$DH = \frac{m(AB + BL) \sin BAD}{\sin ADE}$$

und

$$DH = \frac{BL \sin ABE - n \cdot ED \sin DEB}{n \cdot \sin DEB},$$

also:

$$BL = \frac{n \cdot \sin DEB(m \cdot AB \sin BAD + ED \sin ADE)}{\sin ABE \sin ADE - mn \sin BAD \sin DEB}.$$

Wird hieraus BL berechnet, so findet man leicht DH und damit die Lage der Geraden HL.

[**23**] § 52. **Anmerkung 1.** Der Beweis der ersten Lösung ergiebt sich aus Lemma 6 und 7 (§ 24, 25). Es sind nämlich die Geraden AB, AC, BC, eg und LH Tangenten einer Parabel.

Wenn man es vorzieht in der Formel, auf der die zweite Lösung beruht, nur von den Strecken Gebrauch zu machen, so kann man sie in folgender Weise umändern. Zunächst kann man sie in folgende überführen:

$$BL = \frac{mn \dfrac{AB \sin BAD}{\sin ADE} + n \cdot ED}{\dfrac{\sin ABE}{\sin DEB} - mn \dfrac{\sin BAD}{\sin ADE}}.$$

Zieht man nun Bd parallel zu ED, so wird sein:

$$\text{Winkel } AdB = ADE$$
$$\frac{AB \sin BAD}{\sin ADE} = Bd$$
$$\frac{\sin ABE}{\sin DEB} = \frac{Ea}{aB}$$
$$\frac{\sin BAD}{\sin ADE} = \frac{aD}{Aa}$$

und daher

$$BL = \frac{m \cdot n \cdot Bd + n \cdot ED}{\frac{Ea}{aB} - m \cdot n \frac{aD}{Aa}}$$

oder

$$BL = \frac{n \cdot aB \cdot Aa \cdot (m \cdot Bd + ED)}{Ea \cdot Aa - m \cdot n \cdot aD \cdot aB} \cdot$$

§ 53. **Anmerkung 2.** Eine andere Lösung dieses Problems findet man in *Newton*'s »*Arithmetica universalis*«. Dieser hat es zur Ermittelung der geocentrischen Distanz des Cometen benutzt, indem er die Annahme machte, dass ein kleines Stück der Bahn als eine Gerade betrachtet werden dürfe, und weiter, dass die vier Punkte H, I, K, L die Projectionen von vier Cometenörtern auf die Ekliptik seien.

[**24**] § 54. **Lemma 19. Aufgabe 8.** (Fig. 9.) *Gegeben sind vier Gerade* AE, AG, BF, BH; *man soll denselben ein gegebenes Viereck* $EFGH$ *einschreiben.*

Lösung: Da die Geraden ihrer Lage nach gegeben sind, so kennt man die Winkel CAD, CBD, CAB und CBA. Zieht man nun durch gegenüberliegende Ecken des Vierecks $EFGH$, nämlich EG einerseits und FH andererseits Kreislinien so, dass die Bogen EG und FH doppelt so gross werden, als die Winkel EAG bez. FBH, so ist leicht zu sehen, dass die Punkte A und B auf diesen Peripherien liegen müssen. Macht man weiter $Ea = 2CAB$ und $Fb = 2ABD$ und zieht durch die Punkte a, b die Gerade $baBA$, so wird diese auf den beiden Peripherien die Lagen der Punkte A und B angeben. Zieht man endlich die Geraden HBC und FBD, so werden EA, GA, FB und HB jene vier Geraden sein, denen das Viereck $EFGH$ einzuschreiben war.

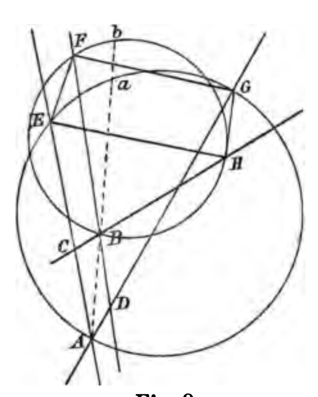


Fig. 9.

§ 55. **Anmerkung.** Es ist, wie man leicht erkennt, nicht nöthig, dass die Seiten des Vierecks $EFGH$ in demselben

Maasse gegeben seien, wie die Seiten des Vierecks $ABCD$, sondern es genügt, dass die Winkel E, F, G, H und das Verhältniss der Seiten bekannt sei. Aus diesem Grunde kann das Problem dann von Nutzen sein, wenn die Bahn eines Cometen schon sehr nahe bekannt ist. Das Problem wird nämlich, wenn die Krümmung desjenigen Theiles der Cometenbahn, den derselbe im Intervall von vier Beobachtungen zurücklegt, sehr nahe bekannt ist, besser genügen, als das vorhergehende, welches einen Theil der Bahn als geradlinig voraussetzt.

[25] § 56. **Lemma 20.** (Fig. 10.) *Wenn man die Sehne NM einer Parabel in G halbirt, GQ parallel zur Axe AF zieht, Q mit dem Brennpunkte F verbindet und endlich die Sehne NM derartig in die Lage nm bringt, dass FQ dieselbe rechtwinklig halbirt, dann liegen die Punkte n und m auf einer Parabel nQm, deren Scheitel Q, deren Axe FQ und deren Brennpunkt F ist; ausserdem verhalten sich die Flächen der Sectoren NFM und nFm wie die Quadratwurzeln aus den Halbparametern der beiden Parabeln.*

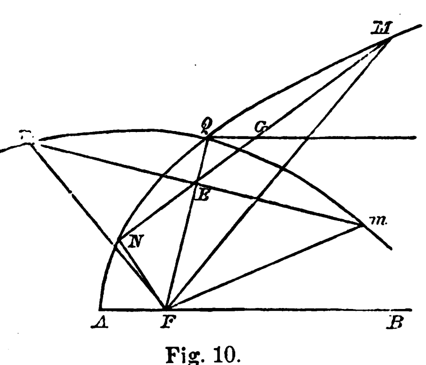


Fig. 10.

Beweis: Da $NG = GM$ und GQ der Axe parallel ist, so ist die Sehne NM parallel zur Tangente der Parabel in Q und ferner ist

$$\text{Winkel } NEF = \tfrac{1}{2} QFB$$

$$\text{und} \quad GQ = QE \quad (\S\ 38).$$

Ferner ist:

$$\overline{NM}^2 = 16 FQ \cdot QG$$

und daher auch:

$$\overline{nm}^2 = 16 FQ \cdot QE.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Parabel, deren Axe und Focaldistanz FQ ist.

Ferner wird sich, wegen $QG = QE$, die Fläche des Segmentes NQM zur Fläche des Segmentes nQm verhalten, wie der Sinus des Winkels $QGE = QEG = NEF$ zu 1; in demselben Verhältnisse stehen aber auch die Flächen der Dreiecke NFM und nFm, weil die Grundlinien NM und nm gleich sind. Also stehen die ganzen Sectoren NFM und nFm im Verhältniss des $\sin NEF$ zu 1. Nun ist aber (§ 4)

$$\sin NEF : 1 = \sqrt{AF} : \sqrt{FQ} = \sqrt{2AF} : \sqrt{2FQ}.$$

Da nun $2AF$ und $2FQ$ die Halbparameter sind, so ist der Satz bewiesen.

[26] § 57. **Anmerkung.** Dieser Satz lässt sich mit entsprechender Begrenzung auch auf die andern Kegelschnitte ausdehnen. Es ist auch ohne besondere Darlegung klar, dass er in der Weise umgekehrt werden kann, dass man aus der Parabel nQm eine beliebige andere ableiten kann, welche durch den Scheitel Q hindurchgeht.

§ 58. **Lemma 21. Aufgabe 9.** (Fig. 10.) *Gegeben sei die Sehne NM und der Pfeil QG; man soll die Fläche des Segmentes NQM und des Sectors NFM finden.*

Lösung: Die Fläche des Segmentes nQm ist $\frac{2}{3}\overline{QE}\cdot\overline{nm}$ und die des Dreieckes nFm ist $\frac{1}{2}\overline{FE}\cdot\overline{nm}$. Also wird

$$\text{Sector } nFmQ = \tfrac{2}{3}\overline{QE}\cdot\overline{nm} + \tfrac{1}{2}\overline{FE}\cdot\overline{nm}$$

$$\text{oder} \quad \text{»} \quad nFmQ = \tfrac{1}{6}\overline{QE}\cdot\overline{nm} + \tfrac{1}{2}\overline{FQ}\cdot\overline{nm}.$$

Nun ist aber (§ 56)

$$\text{Sector } nFm : \text{Sector } NFM = \text{Segm. } nQm : \text{Segm. } NQM$$
$$= \sqrt{FQ} : \sqrt{AF}$$
$$nm = NM$$
$$QE = QG,$$

also wird:

$$\text{Segm. } NQM = \tfrac{2}{3}\overline{NM}\cdot\overline{QG}\sqrt{\frac{AF}{FQ}}$$

$$\text{Sector } NFM = \overline{NM}(\tfrac{1}{6}GQ + \tfrac{1}{2}FQ)\sqrt{\frac{AF}{FQ}}.$$

Da nun

$$\overline{NM}^2 = 16\overline{QG}\cdot\overline{FQ},$$

[27] so wird

$$\text{Segm. } NQM = \tfrac{8}{3}\sqrt{\overline{QG}^3 \cdot AF}$$

$$\text{Sector } NFM = \left(\tfrac{2}{3}\overline{QG}^2 + \tfrac{1}{8}\overline{NM}^2\right)\sqrt{\frac{AF}{QG}}\,.$$

§ 59. **Zusatz.** Aehnlich erhält man:

$$\text{Sector } NFM = NM\left(\frac{\overline{NM}^2}{96 \cdot FQ} + \tfrac{1}{2}FQ\right)\sqrt{\frac{AF}{FQ}}\,.$$

§ 60. **Lemma 22. Aufgabe 10.** (Fig. 10.) *Gegeben sei die Sehne* $NM = k$ *und die Summe der Seiten* $FM + FN = a + b$; *man soll die Fläche des Sectors* NFM *finden.*

Lösung. Da man hat (§ 58):

$$\text{Sector } NFM = NM(\tfrac{1}{6}QG + \tfrac{1}{2}FQ)\sqrt{\frac{AF}{FQ}}$$

und weiter nach § 44, 45:

$$FQ = \tfrac{1}{4}\left(a + b + \sqrt{(a+b)^2 - k^2}\right)$$

$$QG = \tfrac{1}{4}\left(a + b - \sqrt{(a+b)^2 - k^2}\right),$$

so folgt nach Substitution und ausgeführter Reduction:

$$\text{Sector } NFM = \frac{k\left(a + b + \tfrac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2 - k^2}\right)}{3\sqrt{a + b + \sqrt{(a+b)^2 - k^2}}}\sqrt{AF}\,.$$

[28] § 61. **Zusatz 1.** Da

$$\left(a + b + \sqrt{(a+b)^2 - k^2}\right)\left(a + b - \sqrt{(a+b)^2 - k^2}\right) = k^2\,,$$

so folgt auch:

$$\text{Sector } NFM$$

$$= \sqrt{a + b - \sqrt{(a+b)^2 - k^2}}\left(a + b + \tfrac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2 - k^2}\right)\frac{\sqrt{AF}}{3}\,.$$

§ 62. **Zusatz 2.** Der zweite Factor dieser Formel, nämlich $a + b + \frac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2 - k^2}$, geht nach leichter Aenderung über in

$$\tfrac{1}{2}(a + b) + \tfrac{1}{2}\left(a + b + \sqrt{(a+b)^2 - k^2}\right),$$

so dass man die Formel selbst in folgende überführen kann

$$\frac{3 \text{ Sect. } NFM}{\sqrt{AF}}$$

$$= \tfrac{1}{2}(a+b)\sqrt{(a+b) - \sqrt{(a+b)^2 - k^2}} + \tfrac{1}{2}k\sqrt{(a+b) + \sqrt{(a+b)^2 - k^2}},$$

oder wenn man der Kürze halber $a + b = g$ setzt,

$$\frac{3\,\mathrm{Sect.}\,NFM}{\sqrt{AF}} = \tfrac{1}{2} g \sqrt{g - \sqrt{g^2 - k^2}} + \tfrac{1}{2} k \sqrt{g + \sqrt{g^2 - k^2}}.$$

§ 63. **Zusatz 3.** Hieraus aber folgt:

$$\frac{3\,\mathrm{Sect.}\,NFM}{\sqrt{AF}}$$

$$= \tfrac{1}{2} g \sqrt{\frac{g+k}{2}} - \tfrac{1}{2} g \sqrt{\frac{g-k}{2}} + \tfrac{1}{2} k \sqrt{\frac{g+k}{2}} + \tfrac{1}{2} k \sqrt{\frac{g-k}{2}}$$

und auch:

$$\frac{3\,\mathrm{Sect.}\,NFM}{\sqrt{AF}} = \tfrac{1}{2}(g+k)\sqrt{\frac{g+k}{2}} - \tfrac{1}{2}(g-k)\sqrt{\frac{g-k}{2}},$$

[29] oder am kürzesten:

$$\frac{3\,\mathrm{Sect.}\,NFM}{\sqrt{AF}} = \left(\frac{g+k}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{g-k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Die Fläche A des Sectors wird also:

$$A = \tfrac{1}{3}\sqrt{AF}\left(\left(\frac{a+b+k}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{a+b-k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right).$$

§ 64. **Anmerkung 1.** Für diese sehr schöne Formel, die wir hier durch ein weitläufiges Rechnungsverfahren ermittelt haben, werden wir unten einen kürzeren Beweis geben, wenn von der Ermittelung der Zeit, in welcher ein Comet einen bestimmten Bogen seiner parabolischen Bahn durchmisst, die Rede sein wird. Dann werden wir auch angeben, was man erhält, wenn die Bahn ein beliebiger Kegelschnitt ist und welche Aenderungen und Beschränkungen dann eintreten.

§ 65. **Anmerkung 2.** Das sind die hauptsächlichsten Sätze, welche ich vorausschicken wollte, um die Theorie der parabolischen Cometenbewegung um so eleganter darstellen zu können. Wir werden in der That sehen, dass die bisher abgeleiteten Formeln sich einfacher gestalten, wenn wir an Stelle der Fläche des Sectors die Zeit einführen, die der Comet zum Durchlaufen des Bogens braucht.

---

[30] Zweiter Theil.

Die wichtigsten Eigenschaften der parabolischen Bewegung der Cometen.

§ 66. **Gesetz 1.** *Alle Himmelskörper, welche sich um die Sonne bewegen, Planeten sowohl als Cometen, werden durch Centralkräfte getrieben und werden von der Sonne angezogen, so dass die Anziehung umgekehrt proportional dem Quadrat der Distanz ist.*

§ 67. **Gesetz 2.** *Die Zeiten, in welchen sie die Bogen ihrer Bahn durchlaufen, sind den Flächen proportional, welche der Radiusvector, d. h. die Verbindungslinie der Sonne mit den Cometen oder Planeten, überstreicht.*

§ 68. **Gesetz 3.** *Die Bahnen, in denen sie sich um die Sonne bewegen, sind nothwendig Kegelschnitte, in deren einem Brennpunkte sich die Sonne befindet.*

[31] § 69. **Gesetz 4.** *Wenn verschiedene Cometen und Planeten unter sich verglichen werden, so ist die Zeit, in welcher der Comet oder Planet einen Bogen seiner Bahn durchläuft, proportional der vom Radiusvector überstrichenen Fläche, dividirt durch die Quadratwurzel aus dem Halbparameter der Bahn.*

§ 70. **Anmerkung.** Es ist hier nicht der Ort auseinanderzusetzen, was in diesen Gesetzen der Beobachtung und was den Principien der Mechanik zu verdanken ist. Die Grundlage hat *Kepler* gegeben, indem er die drei letzten Gesetze mit vieler Mühe aus den Beobachtungen ableitete und sie auf die Planeten anwandte. Das erste Gesetz hat *Newton* aus Beobachtungen deducirt, dann aber alles aus den Principien der Mechanik abgeleitet, indem er die ersten Fundamente einer Theorie der Centralkräfte schuf. Das dritte Gesetz und namentlich die Nothwendigkeit desselben hat *Joh. Bernoulli* mit gewohntem Scharfsinn ins volle Licht gesetzt. Diese Gesetze sind so einleuchtend und so allgemein bekannt, dass es Zeitverschwendung wäre, wenn ich von Neuem auf ihren Nachweis einginge. Sie sollen hier als Principien hingestellt sein, aus welchen die specielleren Eigenschaften der Bewegungen der Himmelskörper abzuleiten sind. Diese letzteren aber will ich in natürlicher und stetiger Folge, soweit sie zu unserem Ziele

beitragen können, aus jenen Gesetzen ableiten, indem ich bereits bekannte vorausschicke und unter die neuen einfüge.

[32] § 71. **Lehrsatz 1.** (Fig. 11.) *Wenn zwei oder mehrere Cometen in elliptischen Bahnen sich bewegen, deren grosse Axen gleich sind, so sind auch die Umlaufszeiten gleich.*

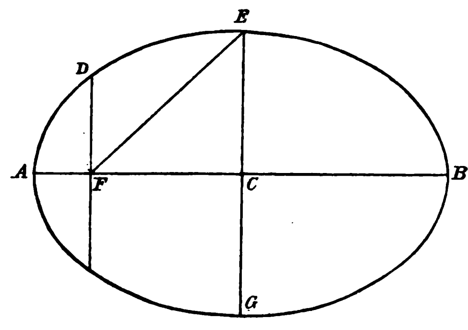


Fig. 11.

Beweis: Sei F das Centrum der Sonne und zugleich Brennpunkt der Ellipse ADB mit der grossen Axe AB, der kleinen Axe EG und dem Halbparameter FD; dann ist nach den Eigenschaften der Ellipse:

$$FD \cdot AC = CE^2 = AF \cdot FB.$$

Bezeichnet ferner $\frac{1}{\pi}$ das Verhältniss des Kreisdurchmessers zur Peripherie, so ist die Fläche der Ellipse

$$A = \pi \cdot AC \cdot CE.$$

Nach Gesetz 4 (§ 69) ist aber die Zeit proportional der Fläche, dividirt durch die Quadratwurzel aus dem Halbparameter. Nennt man also T die Umlaufszeit, so wird

$$T = \frac{\pi \cdot AC \cdot CE}{m\sqrt{FD}}.$$

Nun ist aber

$$\sqrt{FD} = \frac{CE}{\sqrt{AC}},$$

also wird:

$$T = \frac{\pi}{m} AC^{\frac{3}{2}}.$$

Die Umlaufszeit hängt also einzig und allein von der grossen Axe der Ellipse ab. Damit ist unsere Behauptung bewiesen zugleich mit dem folgenden

[33] § 72. **Lehrsatz 2.** (Fig. 11.) *Die Umlaufszeiten der in Ellipsen sich bewegenden Cometen und Planeten verhalten sich wie die dreihalbten Potenzen der grossen Halbaxen oder der mittleren heliocentrischen Entfernungen.*

Beweis: Die mittlere Distanz ist nämlich

$$FE = \frac{AF + FB}{2} = AC;$$

nach dem vorausgehenden Lehrsatz ist aber

$$T = \frac{\pi}{m} AC^{\frac{3}{2}},$$

also ist auch

$$T = \frac{\pi}{m} FE^{\frac{3}{2}}.$$

§ 73. **Aufgabe 12.** *Man soll die Distanzen und Umlaufszeiten der Cometen und Planeten, sowie auch deren Verhältnisse in Zahlen ausdrücken.*

Erste Lösung. Da die Erde sich in einer Ellipse bewegt, so setze man die mittlere Distanz derselben von der Sonne = 100 000 und drücke in denselben Einheiten alle anderen Distanzen aus. Sodann zähle man die Zeit in gewöhnlichen Tagen und deren Decimaltheilen. Es ist aber die Umlaufszeit der Erde gleich 365.25659 Tage. Daher haben wir [34] in der Formel des vorhergehenden Lehrsatzes:

$$AC = FE = 100\,000, \quad T = 365.25659;$$

damit wird der Werth von m gefunden, welcher das gesuchte Verhältniss ist. Es wird

$$m = \frac{\pi \cdot AC^{\frac{3}{2}}}{T}$$

und daher

$$\begin{aligned}
\log AC^{\frac{3}{2}} &= 7.500\,0000 \\
\log \pi &= 0.497\,1499 \\
\hline
&\ 7.997\,1499 \\
\log T &= 2.562\,5980 \\
\log m &= 5.434\,5519
\end{aligned}$$

woraus

$$m = 271\,989.4$$

und daher

$$T = \frac{\pi \cdot AC^{\frac{3}{2}}}{271\,989.4}.$$

Zweite Lösung. Seit Erfindung der Decimalbrüche ist es bequemer, die mittlere Distanz der Erde gleich 1 zu setzen. Setzt man daher

$$T = n\pi\, AC^{\frac{3}{2}}$$

und nimmt $AC = 1$, so folgt

$$n = \frac{T}{\pi}$$

und man hat

$$\begin{aligned} \log T &= 2.562\,5980 \\ \log \pi &= 0.497\,1499 \\ \hline \log n &= 2.065\,4481 \end{aligned}$$

woraus

$$n = \frac{1}{m} = 116.2648\,.$$

[35] Ist daher die Fläche eines beliebigen Sectors gleich A, der Halbparameter gleich s, die Zeit, in der der Bogen durchlaufen wird, in Tagen ausgedrückt gleich T, so wird

1) wenn die mittlere Distanz der Erde = 100 000 gesetzt wird,

$$T = \frac{A}{m\sqrt{s}} = \frac{nA}{\sqrt{s}} = \frac{A}{\sqrt{s} \cdot 271\,989.4};$$

2) wenn die mittlere Distanz der Erde = 1 gesetzt wird:

$$T = \frac{A}{m\sqrt{s}} = \frac{nA}{\sqrt{s}} = \frac{A \cdot 116.2648}{\sqrt{s}}.$$

§ 74. **Anmerkung.** Den Buchstaben π, m, n, A, T werden wir im Folgenden meistens dieselbe Bedeutung beilegen wie hier, wie wir auch die Bedeutung der oben (§ 33) eingeführten Buchstaben a, b, c, k beibehalten wollen. Die Buchstaben m, T, A hat schon *Euler* in der »*Theoria Cometarum et Planetarum*« im selben Sinne benutzt.

§ 75. **Aufgabe 13.** *Man soll die Geschwindigkeit eines in einem Kreise sich bewegenden Himmelskörpers finden.*

Lösung. Ist r der Halbmesser des Kreises, $r^2\pi$ seine Fläche, so wird die Umlaufszeit

$$T = \frac{r^2\pi}{m\sqrt{r}} = \frac{\pi}{m} r^{\frac{3}{2}}.$$

[36] In dieser Zeit wird die Peripherie $2r\pi$ beschrieben. Wenn man daher die Geschwindigkeit ausdrückt durch den Bogen, der in einem Tage durchlaufen wird, und sie K nennt, so wird

$$K = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2m}{\sqrt{r}}.$$

§ 76. **Lehrsatz 3.** (Fig. 12.) *Wenn ein Comet sich in einer Parabel AM bewegt, so verhält sich seine Geschwindigkeit an einer beliebigen Stelle M zu der Geschwindigkeit, mit welcher er sich in derselben Entfernung von der Sonne F auf einer Kreisbahn bewegen würde, wie $\sqrt{2}:1$.*

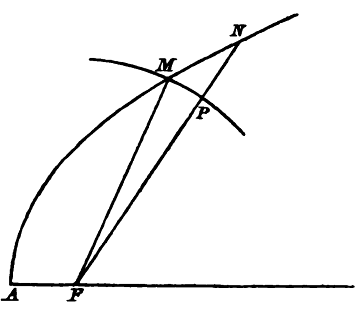


Fig. 12.

Beweis: Da die Zeiten sich wie die Flächen, dividirt durch die Quadratwurzeln aus den Halbparametern verhalten (§ 69), so wird die Zeit, in der der unendlich kleine parabolische Bogen MN durchlaufen wird, sein

$$T = \frac{\text{Sect. } MFN}{m\sqrt{2AF}},$$

die Zeit aber, in der der Kreisbogen MP durchlaufen wird:

$$t = \frac{\text{Sect. } MFP}{m\sqrt{FM}}.$$

Da aber die Geschwindigkeiten gleich den Bogen, getheilt durch die Zeit sind, so wird, wenn wir sie bez. mit C und K bezeichnen:

$$C = \frac{MN}{T} = \frac{MN \cdot m\sqrt{2AF}}{\text{Sect.}\,(MFN)}$$

$$K = \frac{MP}{t} = \frac{MP \cdot m\sqrt{FM}}{\text{Sect.}\,(MFP)},$$

also:

$$C : K = \frac{MN \cdot \sqrt{2AF}}{\text{Sect.}\,(MFN)} : \frac{MP \cdot \sqrt{FM}}{\text{Sect.}\,(MFP)}.$$

Es ist aber (§ 4)

$$AF = MF \sin MNP^2 = MF \cdot \frac{MP^2}{MN^2},$$

[**37**] also:

$$MN\sqrt{AF} = MP\sqrt{MF}.$$

Da nun der Winkel MFP unendlich klein ist, so werden die Flächen gleich und daher

$$C : K = \sqrt{2} : 1.$$

§ 77. **Zusatz.** Da die Kreisgeschwindigkeit nach § 75 ist

$$K = \frac{2m}{\sqrt{MF}},$$

so wird die parabolische Geschwindigkeit:

$$C = \frac{2m\sqrt{2}}{\sqrt{MF}}.$$

Diese Formel drückt die Strecke aus, welche der Comet in einem Tage in der Richtung der Tangente durchlaufen würde (§ 75), wenn er nicht durch die Anziehung von der geraden Linie abgelenkt würde.

§ 78. **Anmerkung.** Von dieser Eigenschaft der parabolischen Bewegung kann man Gebrauch machen, wenn man die Länge des in einem kleinen Zeitintervall durchlaufenen Bogens genähert anzugeben hat; dieselbe kann auch mit entsprechender Beschränkung auf elliptische Bahnen ausgedehnt werden. Die schöne Einfachheit des Satzes rührt daher, dass die parabolische Geschwindigkeit ausschliesslich von der heliocentrischen Entfernung des Cometen abhängt und dieselbe bleibt, welches auch der Parameter der Parabel sei. Da aber die Geschwindigkeit sich von Moment zu Moment ändert, so ist der Nutzen des übrigens längst bekannten Satzes ein geringer.

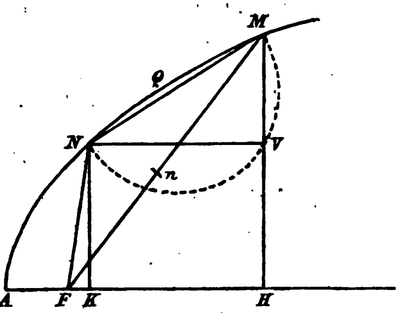


Fig. 5.

[38] § 79. **Aufgabe 14.** (Fig. 5.) *Gegeben seien die beiden Radienvectoren NF und MF und der Winkel NFM; man soll die Zeit finden, in welcher der Comet den parabolischen Bogen NM beschreibt.*

Lösung: Die Fläche des Sectors NFM ist (§ 29)

$$A = \tfrac{1}{3}\sqrt{ab}\cdot\sin c\left(a+b+\sqrt{ab}\cos c\right).$$

Der Halbparameter ist (§ 28)

$$s = 2AF = \frac{2ab\sin c^2}{a+b-2\sqrt{ab}\cdot\cos c}.$$

Da nun die gesuchte Zeit durch (§ 75)

$$T = \frac{nA}{\sqrt{s}}$$

gegeben ist, so erhält man durch Substitution:

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}}\left(a+b+\sqrt{ab}\cos c\right)\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}\cos c}.$$

§ 80. **Zusatz 1.** Diese Formel giebt entwickelt:

$$18m^2T^2 = (a+b)^3 - 3(a+b)ab\cos c^2 - 2ab\sqrt{ab}\cos c^3$$

oder

$$18m^2T^2 = a^3+b^3+3(a+b)ab\sin c^2 - 2ab\sqrt{ab}\cos c^3,$$

so dass also, wenn die Zeit gegeben ist, jede der Grössen a, b, c durch eine Gleichung dritten Grades gefunden wird.

[39] § 81. **Zusatz 2.** Wird $c = \tfrac{1}{2}NFM = 90^\circ$ oder $NFM = 180^\circ$, also $\cos c = 0$, so wird die Formel sehr kurz:

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}}(a+b)^{\frac{3}{2}}.$$

Dies ist also die Zeit, die ein Comet braucht, um von einem beliebigen Punkte seiner Bahn zum entgegengesetzten auf demselben Durchmesser zu gelangen.

§ 82. **Zusatz 3.** Ist also die Zeit bekannt, die der Comet von einem seiner Knoten bis zum andern braucht, so kann damit die Summe der in der Knotenlinie liegenden Radienvectoren $a + b$ angegeben werden:

$$a + b = \sqrt[3]{18\, T^2 m^2}.$$

§ 83. **Aufgabe 15.** (Fig. 5.) *Gegeben ist die Summe der Radienvectoren NF und MF und die Sehne NM, welche das Dreieck NFM begrenzt; man soll die Zeit finden, in welcher der Bogen NQM durchlaufen wird.*

Erste Lösung: Da nach § 30 ist:

$$2AF = s = \frac{k^2 - (a-b)^2}{2\left(a + b - \sqrt{(a+b)^2 - k^2}\right)}$$

und

$$A = \tfrac{1}{6}\left(a + b + \tfrac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2 - k^2}\right)\sqrt{k^2 - (a-b)^2},$$

so erhält man durch Substitution in die Formel (§ 73)

$$T = \frac{nA}{\sqrt{s}}$$

[40] nach durchgeführter Reduction

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}}\left(a + b + \tfrac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2 - k^2}\right)\sqrt{a + b - \sqrt{(a+b)^2 - k^2}}.$$

Zweite Lösung: Gebraucht man die Formel (§ 31)

$$2AF = \left(k^2 - (a-b)^2\right)\left(a + b + \sqrt{(a+b)^2 - k^2}\right)\frac{1}{2k^2},$$

so hat man auch:

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{k\left(a + b + \tfrac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2 - k^2}\right)}{\sqrt{a + b + \sqrt{(a+b)^2 - k^2}}}.$$

Dritte Lösung: Nach § 63 ist

$$\frac{3A}{\sqrt{AF}} = \left(\frac{a+b+k}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{a+b-k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Also hat man nach § 73, wonach $T = \frac{nA}{\sqrt{s}} = \frac{A}{m\sqrt{2AF}}$ ist, auch:

$$T = \frac{1}{m 3 \sqrt{2}} \left(\left(\frac{a+b+k}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{a+b-k}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right).$$

§ 84. **Zusatz 1.** Nennt man die Summe der Radienvectoren $a + b = g$, so kann die Formel der ersten Lösung in folgende Gleichung aufgelöst werden:

$$0 = k^6 + 6g^2k^4 + 9g^4k^2 - 144m^2T^2g^2 - 432m^2T^2gk^2 + 72^2m^2T^2.$$

[41] § 85. **Zusatz 2.** Aehnlich kann die Formel der dritten Lösung in die Reihe übergeführt werden:

$$4mT = k\sqrt{g} - \frac{1}{4 \cdot 6}\frac{k^3}{g^{\frac{3}{2}}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}\frac{k^5}{g^{\frac{7}{2}}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14}\frac{k^7}{g^{\frac{11}{2}}} - \ldots\ldots$$

oder wenn die Brüche ausgerechnet werden:

$$4mT = k\sqrt{g} - \frac{1}{24}\frac{k^3}{g^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{128}\frac{k^5}{g^{\frac{7}{2}}} - \frac{3}{1024}\frac{k^7}{g^{\frac{11}{2}}} - \frac{143}{98304}\frac{k^9}{g^{\frac{15}{2}}} - \ldots$$

Diese Reihe ist um so convergenter, je kleiner der Winkel NFM ist. Für grössere Winkel ist die endliche Formel selbst vorzuziehen.

§ 86. **Aufgabe 16.** (Fig. 6.) *Gegeben ist die Sehne NM und der Pfeil $QG = QE$; man soll die Zeit finden, in welcher der Comet den Bogen NM durchläuft.*

Lösung: Da nach § 58

$$A = (\tfrac{2}{3} QG^2 + \tfrac{1}{8} NM^2) \sqrt{\frac{AF}{QG}}$$

und ferner nach § 73

$$T = \frac{nA}{\sqrt{2AF}},$$

[42] so wird:

$$T = \frac{n(\frac{2}{3} QG^2 + \frac{1}{8} NM^2)}{\sqrt{2QG}}.$$

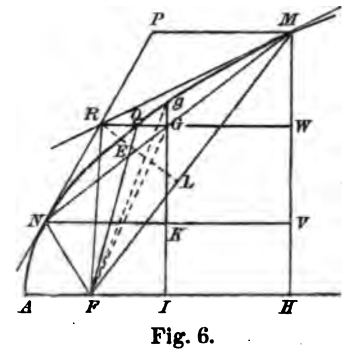


Fig. 6.

§ 87. **Aufgabe 17.** (Fig. 6.) *Gegeben ist die Sehne NM und der Radiusvector FQ; man soll die Zeit finden, in der der Comet den Bogen NM beschreibt.*

Lösung: Nach der Formel der vorhergehenden Aufgabe ist

$$T = \frac{n(\frac{2}{3}QG^2 + \frac{1}{8}NM^2)}{\sqrt{2QG}}.$$

Da nun

$$\frac{NM^2}{16FQ} = QG$$

ist, so folgt:

$$T = \frac{n \cdot NM}{\sqrt{2}}\left(\frac{NM^2}{96FQ^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2}\sqrt{FG}\right).$$

§ 88. **Zusatz.** Entwickelt man diese Formel in die Gleichung

$$NM^3 + 48NM \cdot FQ^2 = 96\sqrt{2}\, m \cdot T \cdot FQ^{\frac{3}{2}}$$

und wendet dann die Methode an, die ich im Bande III der »Acta Helvetica« (1758) beschrieben habe, so ergiebt sich die Reihe:

$$NM = \sqrt{2}\left(2\frac{mT}{FQ^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{3}\frac{m^3T^3}{FQ^{\frac{7}{2}}} + \frac{1}{6}\frac{m^5T^5}{FQ^{\frac{13}{2}}} - \frac{1}{9}\frac{m^7T^7}{FQ^{\frac{19}{2}}} + \cdots\right).$$

[43] Wenn man die mittlere Entfernung der Erde $= 1$ nimmt und für $m = \frac{1}{n}$ den Werth setzt, den wir oben (§ 73) gefunden haben, nämlich $n = 116.2648$, so wird die Reihe, in Zahlen ausgedrückt:

$$NM = 0.024\,3275\,\frac{T}{FQ^{\frac{1}{2}}} - 0.000\,000\,299\,9500\,\frac{T^3}{FQ^{\frac{7}{2}}}$$
$$+ 0.000\,000\,000\,011\,094\,87\,\frac{T^5}{FQ^{\frac{13}{2}}} + \cdots.$$

Die Logarithmen der Coefficienten sind:

des ersten 0.386 0967 — 2
des zweiten 0.477 0488 — 7
des dritten 0.045 1222 — 11

§ 89. **Anmerkung 1.** Diese Reihe scheint ausserordentlich convergent zu sein; sie convergirt um so schneller, je weniger Tage die Zwischenzeit T beträgt, vorausgesetzt, dass der Radius-*vector nicht* beträchtlich kleiner als die Einheit ist.

§ 90. **Anmerkung 2.** (Fig. 10.) Unsere Formel wird überdies auch in dem Falle von Nutzen sein können, wo man die Länge der Ordinate nm zu berechnen hat, wenn die Zeit, in welcher der Bogen nQm durchlaufen wird, gegeben ist.

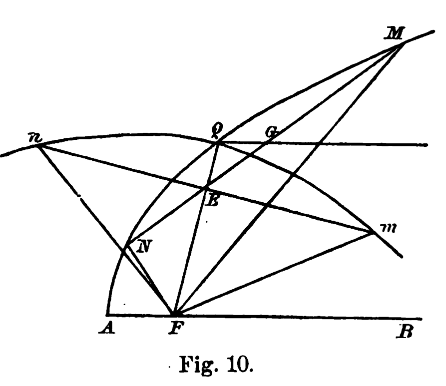


Fig. 10.

§ 91. **Aufgabe 18.** (Fig. 10.) *Gegeben ist der Pfeil QG und der Radiusvector FQ; man soll die Zeit finden, in welcher der Comet den Bogen NQM durchläuft.*

[**44**] Lösung. Da (§ 86)

$$T = n\,\frac{\frac{2}{3}QG^2 + \frac{1}{8}NM^2}{\sqrt{2QG}}$$

und

$$NM^2 = 16FQ\;QG,$$

so folgt:

$$T = n\,\frac{\frac{2}{3}QG^2 + 2FQ\cdot QG}{\sqrt{2QG}}.$$

§ 92. **Zusatz.** Hieraus folgt umgekehrt:

$$FQ = \frac{mT}{\sqrt{2QG}} - \frac{1}{3}QG = (\S\ 40, 42)\ \frac{a+b}{2} - QG,$$

also:

$$a + b = \frac{2mT}{\sqrt{2QG}} + \frac{4}{3}QG.$$

§ 93. **Lehrsatz 4.** (Fig. 10.) *Wird dieselbe Construction ausgeführt wie in Lemma 20 (§ 56), dann sind die Zeiten, in welchen die Bogen NQM und nQm durchlaufen werden, einander gleich.*

Erster Beweis: Aus der vorhergehenden Aufgabe erhellt nämlich, dass die Zeit gegeben ist durch den Radiusvector FQ und den Pfeil QG. Nun sind aber in beiden Parabeln nach

dem citirten Satze (§ 56) die Radienvectoren und die Pfeile $QG = QE$ einander gleich. Also sind es auch die Zeiten, in denen die Bogen NM und nm durchlaufen werden.

[45] Zweiter Beweis: Da die Zeiten sich wie die Flächen dividirt durch die Quadratwurzeln aus den Halbparametern verhalten (§ 69), so verhalten sie sich also wie

$$\frac{\text{Sect.}\,(NFM)}{\sqrt{2AF}} \text{ zu } \frac{\text{Sect.}\,(nFm)}{\sqrt{2FQ}}.$$

Da nun nach § 56

$$\frac{\text{Sect.}\,(NFM)}{\sqrt{2AF}} = \frac{\text{Sect.}\,(nFm)}{\sqrt{2FQ}},$$

so sind auch die Zeiten gleich.

§ 94. **Zusatz.** Da die Zeit gegeben ist durch die Summe der Radienvectoren $Fn + Fm$ bez. $FN + FM$ und durch die Sehne nm bez. NM, im vorliegenden Falle aber $nm = NM$ (§ 56) und die Zeiten gleich, so ist umgekehrt klar, dass auch $nF + mF = NF + MF$ oder die Summe der Radienvectoren gleich sein muss.

§ 95. **Anmerkung.** Diese hervorragende Eigenschaft der parabolischen Bewegung der Cometen kann auch mit entsprechender Begrenzung auf die anderen Kegelschnitte ausgedehnt werden. Uebrigens ist auch hier dasselbe zu bemerken, was wir schon zum Lemma 20 (§ 56) bemerkt haben, nämlich dass wir, wenn der Brennpunkt F festgehalten wird, statt der Parabel NM eine beliebige andere nehmen können, die durch Q hindurchgeht. Und da die Zeit, in welcher die Bewegung des Cometen durch den beliebigen Bogen NQM ausgeführt wird, einzig und allein abhängt von der Länge der Sehne NM und von der Summe der Seiten $NF + MF$, so ist damit ganz allgemein der Isochronismus der Cometenbewegung dargethan und die Geschwindigkeit ist, wenn sie auch selber unbekannt [46] ist, in derselben Distanz von der Sonne in allen Parabeln dieselbe. Nunmehr wollen wir untersuchen, was hieraus folgt.

§ 96. **Lehrsatz 5.** (Fig. 10.) *Wenn die Summe der Radienvectoren $FN + FM$ und die Sehne NM gegeben sind, dann wird die Zeit, in welcher der Bogen NQM, der die Sehne spannt, durchlaufen wird, stets völlig dieselbe sein, von welcher Parabel wir auch Gebrauch machen, wofern nur die Summe der Seiten $FN + FM$ grösser als der Halbparameter ist.*

Beweis: Der erste Theil des Satzes folgt daraus, dass die Zeit nur von der Sehne NM und der Summe der Seiten $FN + FM$ abhängt. Wenn aber irgend welche Parabel angenommen wird und dieselbe durch den Punkt Q gehen muss, so ist klar, dass der grösste Halbparameter nur $2FQ$ sein kann. Nun ist aber (§ 94) $FN + FM = Fn + Fm$ und $Fm = Fn = FQ + QE$ und daher $Fn > FQ$ und mithin $FN + FM > 2FQ$.

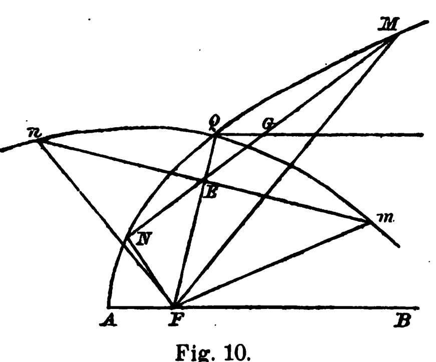


Fig. 10.

§ 97. **Anmerkung.** Man muss also eine solche Parabel auswählen, dass ihr Halbparameter kleiner als $2FQ$ wird. Wenn daher eine Scala zu construiren ist, die für beliebige Parabeln dienen kann, so wird sich diejenige am meisten empfehlen, deren Parameter gleich 0 ist, oder was dasselbe ist, die gerade Linie, die vom Centrum der Sonne ins Unendliche gezogen wird. Wenn nun auch kaum ein Comet sich in einer derartigen geradlinigen Parabel bewegt, so kann sie doch mit Nutzen verwendet werden und gewiss als Maass dienen, um die Bewegung der Cometen in beliebigen anderen Parabeln zu [**47**] definiren. Da diese Parabel mit einer Geraden identisch ist, so scheint der Comet, der in ihr sich zu bewegen supponirt wird, gleichsam auf die Sonne zu zu fallen. Es ergiebt sich so ganz natürlich folgende

§ 98. **Definition 1.** *Unter »lapsus parabolicus« eines Cometen in Bezug auf die Sonne versteht man die Bewegung desselben auf einer Parabel, deren Parameter gleich Null ist, oder deren Scheitel mit dem Brennpunkte im Centrum der Sonne zusammenfällt.*

§ 99. **Zusatz 1.** Da die Parabel ins Unendliche ausläuft, so beginnt der »lapsus parabolicus« mit Null; in irgend einer bestimmten Entfernung von der Sonne aber ist er das wohldefinirte Maass der Geschwindigkeit.

§ 100. **Zusatz 2.** Da die Geschwindigkeit des Cometen in der Parabel nur von seiner Entfernung von der Sonne

abhängt (§ 78), so wird sie, wenn diese mit MF bezeichnet wird, sein (§ 77):

$$C = \frac{2m\sqrt{2}}{\sqrt{MF}}.$$

§ 101. **Zusatz 3.** Da ferner der lapsus parabolicus im Anfang Null ist (§ 99), so ist es bequemer, die Zeiten vom Centrum der Sonne nach rückwärts zu zählen, indem man an Stelle des Falles den parabolischen Aufstieg nimmt.

[**48**] § 102. **Aufgabe 19.** (Fig. 13.) *Man soll die Intervalle der Zeiten im lapsus parabolicus definiren, oder die Zeit, in welcher der Comet von einer gegebenen Entfernung bis zu einer bestimmten anderen gelangt.*

Lösung: Sei F das Centrum der Sonne, FM die eine Distanz, FN die andere, so ist nach der Zeit gefragt, in

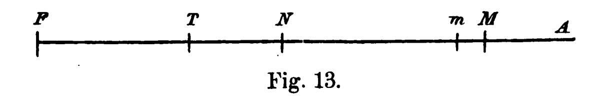


Fig. 13.

welcher der Comet die Strecke MN zurücklegt. Wir betrachten FM und FN als Radienvectoren, MN als die Sehne des zu durchlaufenden Bogens, welcher in unserem Falle keine Krümmung hat, dann wird sein (§ 83)

$$T = \frac{1}{3m\sqrt{2}}\left(\left(\frac{FN+FM+MN}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{FN+FM-MN}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right).$$

Nun ist im vorliegenden Falle:

$$MN = FM - FN,$$

also:

$$\frac{FN+FM+MN}{2} = FM$$

$$\frac{FN+FM-MN}{2} = FN$$

und daher die gesuchte Zeit:

$$T = \frac{1}{3m\sqrt{2}}\left(FM^{\frac{3}{2}} - FN^{\frac{3}{2}}\right).$$

[49] § 103. **Zusatz 1.** Die Zeit, in welcher der Comet von M bis zum Centrum gelangt, wird also erhalten, indem man $FN = 0$ setzt, nämlich:

$$T = \frac{1}{3m\sqrt{2}} FM^{\frac{3}{2}}.$$

§ 104. **Zusatz 2.** Hieraus folgt umgekehrt:

$$FM = \left(\frac{18\,T^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

oder wenn wir für n den Werth substituiren, der der mittleren Entfernung 1 der Erde von der Sonne entspricht (§ 73)

$$\log FM = \tfrac{2}{3} \log T - 0.958\,5412.$$

Durch diese Formel wird also in bestimmten Zahlen die Distanz FM durch die Zeit des lapsus parabolicus definirt und umgekehrt.

§ 105. **Anmerkung.** Wenn man in die Formel des ersten Zusatzes für FM der Reihe nach die mittleren Entfernungen der Planeten substituirt, so findet man die Zahl der Tage, in welchen der parabolische Fall des Cometen in die Sonne ausgeführt wird, nämlich

vom	♄	aus	in	807.50	Tagen
»	♃	»	»	325.00	»
»	♂	»	»	51.54	»
»	♁	»	»	27.40	»
»	♀	»	»	16.85	»
»	☿	»	»	6.60	»

Genauer ist der »lapsus parabolicus« für die Längeneinheit = mittlere Entfernung der Erde:

$$27^{d}\ 9^{h}\ 41^{m}\ 34^{s}.$$

[50] § 106. **Zusatz.** Da der besprochene Fall schneller ist als in jeder beliebigen elliptischen, parabolischen oder kreisförmigen Bewegung, so geben die obigen Zahlen die halbe Dauer der kürzesten Zeit, welche ein Comet innerhalb einer Planetenbahn zubringen kann. Die kürzeste Dauer selbst wird für die

♄-Bahn	1615.00	Tage
♃- »	650.00	»
♂- »	103.08	»
♁- »	54.80	»
♀- »	33.70	»
☿- »	13.20	»

Wenn ein hyperbolischer Fall angenommen würde, so würde diese Dauer eine kürzere sein, wie man durch leichte Ueberlegung findet. Da aber der parabolische Fall die Grenze des elliptischen ist, so haben wir doch lieber den parabolischen den kürzesten genannt. Es erhellt übrigens hieraus, dass die Cometen, welche sich unserer Betrachtung darbieten, fast volle fünf Jahre innerhalb der Bahn des Saturn verweilen, wenn wir sie auch kaum ebensoviele Monate sehen können.

§ 107. **Definition 2.** *Unter Scala der parabolischen Geschwindigkeiten wollen wir die Darstellung der Geschwindigkeiten eines in einer Parabel sich bewegenden Cometen für jede beliebige Entfernung von der Sonne verstehen.*

§ 108. **Lehrsatz 6.** (Fig. 13.) *Wenn F das Centrum der Sonne bedeutet und es wird zu jedem beliebigen Punkte M die Zahl der Tage geschrieben, in welchen der parabolische Fall von* [**51**] *M nach F ausgeführt wird, so ist die auf diese Weise getheilte Gerade FM die Scala der parabolischen Geschwindigkeiten.*

Beweis: Es stellt nämlich eine beliebig kleine Abscisse Mm die Strecke des Falles dar. Wenn nun die Zeiten beigeschrieben sind, so wird auch der Zeitraum gegeben sein, in

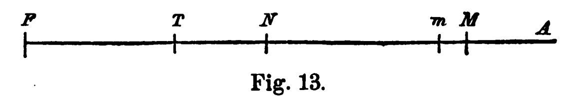


Fig. 13.

welchem der Fall durch Mm ausgeführt wird. Wenn man aber die Strecke Mm durch diesen Zeitraum dividirt, so hat man die Geschwindigkeit. Es stellt also FM die Geschwindigkeiten des parabolischen Falles dar. Da nun die Geschwindigkeit eines in einer beliebigen Parabel sich bewegenden Cometen für dieselbe Distanz von der Sonne constant ist (§ 78), so folgt, dass die Scala FM ganz allgemein die Geschwindigkeit der parabolischen Bewegung darstellt.

§ 109. **Anmerkung.** Man kann auch noch andere Methoden dieser Art geben, um die Scala zu construiren, die hier beschriebene ist aber für unseren Zweck die angemessenste.

§ 110. **Aufgabe 20.** (Fig. 13.) *Man soll die Scala der parabolischen Geschwindigkeiten construiren.*

Lösung. Setzt man die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne $FT = 1$, so kann nach der Formel (§ 104)

$$\log FM = \tfrac{2}{3} \log T - 0.958\,5412$$

[**52**] für jede Anzahl von Tagen T die entsprechende Distanz FM berechnet werden; dieselbe wird aus F auf der Geraden FM aufgetragen und zu M die zugehörige Zahl der Tage hinzugeschrieben; dann ist die Scala construirt.

§ 111. **Anmerkung.** (Fig. 14.) Beistehende Figur stellt eine Scala dar, ausgedehnt bis auf 100 Tage. F ist das Centrum der Sonne, FT die mittlere Entfernung der Erde von

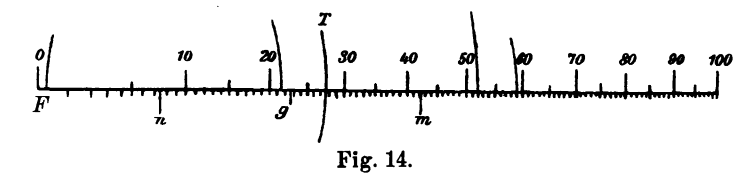


Fig. 14.

der Sonne; der Punkt T muss also auf $27^d\ 9^h\ 41^m\ 34^s$ fallen (§ 105). In einem grösseren Massstab angelegt, werden die Theile leichter zu unterscheiden sein. Es ist selbstverständlich, dass man bei Construction einer Cometenbahn denselben Massstab, d. h. dieselbe Strecke für die Entfernung FT wählen muss, wie in der Scala. Hieran brauche ich also in Zukunft nicht mehr zu erinnern.

§ 112. **Aufgabe 21.** (Fig. 14, 15.) *Wenn eine Cometenbahn, in demselben Massstabe wie die Scala, gezeichnet vorliegt, so soll man die Zeit angeben, in welcher ein beliebiger gegebener Bogen derselben durchlaufen wird.*

Lösung: I. Sei AM die Parabel, F ihr Brennpunkt, FT die astronomische Einheit; gefragt wird, in welcher Zeit der Bogen MN durchlaufen wird. Man trage FN in $F\nu$ auf, halbire νM in g, dann wird $Fg = \frac{1}{2}(FN + FM)$. Ebenso halbirt man die Sehne NM in G. Dann trägt man Fg auf der Scala von F aus auf, wo es in $22^d\!.6$ einschneidet. Ferner

[53] wird die halbe Sehne auf der Scala von g nach beiden Seiten aufgetragen, wodurch man m und n erhält, die in $42^d_.3$ bez. $7^d_.4$ einschneiden. Diese beiden Zeiten von einander subtrahirt, geben $34^d_.9$ und das ist die Zeit, in der der Bogen NM durchlaufen wird.

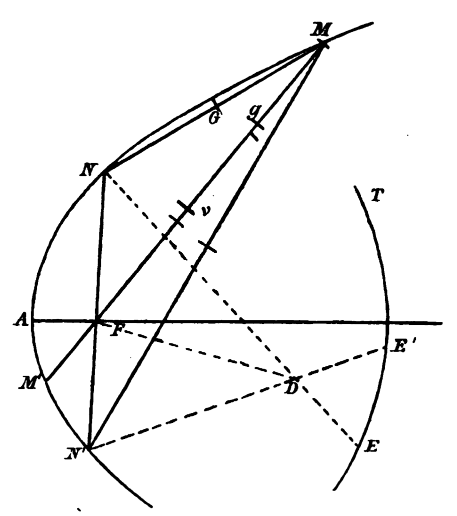


Fig. 15.

II. Wenn der durchlaufene Bogen MAN' im Brennpunkte einen stumpfen Winkel oder einen, der grösser als zwei Rechte ist, spannt, so wird auf dieselbe Weise die halbe Summe der Radienvectoren $\frac{1}{2}(MF + N'F)$ und die Hälfte der Sehne MN' gesucht. Jene fällt auf $21^d_.2$ und die halbe Sehne von $21^d_.2$ aus vorwärts und rückwärts aufgetragen giebt die Punkte $59^d_.0$ und $0^d_.3$. Da aber der Winkel MFN' ein stumpfer ist, so ist die Summe dieser Zeiten zu nehmen, d. h. $59^d_.0 + 0^d_.3 = 59^d_.3$ ist die Zeit, in welcher der Bogen MAN' durchlaufen wird.

III. Wenn die Zeit gesucht wird, in welcher der Comet vom Punkte M nach dem entgegengesetzten Punkte M' kommt, so fallen hier die Radienvectoren FM und FM' mit der Sehne MM' zusammen und die Zeit wird am schnellsten gefunden, wenn man die ganze Sehne MM' auf die Scala aufträgt; sie fällt hier auf $52^d_.2$, welches die Zeit sein wird, in welcher der Bogen MAM' durchlaufen wird.

Beweis: Wenn nämlich die Summe der Radienvectoren und die Sehne des durchlaufenen Bogens dieselben sind, so ist die Zeit dieselbe, von welcher Parabel man auch Gebrauch mache (§ 96); wenn daher die halbe Summe in Fg aufgetragen und die halbe Sehne von g aus nach m und n, so ist mn die Länge der Sehne. Da aber in der Scala die Zeiten ein-[54] geschrieben sind, in denen der Comet die Strecke mn durchläuft, so ist klar, dass damit auch die Zeit gegeben ist, in der MN zurückgelegt wird.

§ 113. **Anmerkung 1.** Aus der Formel (§ 104, 110)

$$\log FM = \tfrac{2}{3} \log T - 0.958\,5412$$

oder

$$FM = \left(\frac{18\,T^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

erhellt, dass *das Quadrat der Zeit, in welcher ein Comet von einem gegebenen Punkte g in parabolischer Bewegung zur Sonne F gelangt, sich verhält wie der Cubus der Distanz Fg.* Die Folge davon ist, dass *in der Scala der parabolischen Geschwindigkeiten in der vierfachen Entfernung von der Sonne die Zeiten 8mal grösser sind.* Ueberhaupt ist der Cubus des Vierfachen gleich dem Quadrate des Achtfachen. Wenn man daher in die Scala auch nur die ganzen Tage einschreibt, so können doch Bruchtheile derselben abgelesen werden, etwa Intervalle von drei Stunden oder halben Tagesquadranten. *Es ist nämlich dem vierten Theile der Distanz der achte Theil der Zeit beizuschreiben.*

§ 114. **Anmerkung 2.** Um in der Anwendung die Halbirung der Sehne NM und der Strecke νM sich zu ersparen, ist es gerathen, die Scala im doppelten Massstab zu construiren. Dann hat man die ganze Summe der Radienvectoren FM und FN und die ganze Sehne auf die beschriebene Weise auf der Scala abzutragen und es leuchtet ohne Weiteres ein, dass man dadurch die doppelte Genauigkeit der Ablesung erhält.

[55] § 115. **Anmerkung 3.** Um die Zeichnung der Scala kürzer und leichter bewerkstelligen zu können, kann man eine Tafel berechnen, die das Verhältniss zwischen der Zeit und dem »lapsus parabolicus« enthält. (§ 110.) Diese Tafel wird auch von Nutzen sein, wenn man die Aufgabe durch Rechnung lösen will. Wir haben des häufigen Gebrauches halber eine

solche Tafel am Schlusse des Buches angehängt. Uebrigens gilt von der Tafel dieselbe Bemerkung wie von der Scala (§ 113), wenn man Bruchtheile der Zeit zu erhalten wünscht.

§ 116. **Anmerkung 4.** Aus Vorstehendem erhellt, dass der Gebrauch der Scala leicht und bequem ist, wenn man aus der Summe der Radienvectoren und aus der Sehne die Zeit ermitteln will, in der der Bogen durchlaufen wird. Wenn man aber die Aufgabe umkehrt und aus der Summe der Radienvectoren und der Zeit die Sehne, oder aus der Sehne und der Zeit die Summe der Radienvectoren oder, was am häufigsten vorkommt, aus einem der beiden Radien, der Zeit und dem Halbparameter der Parabel den anderen Radius und die Sehne ermitteln will, so kann diese nur durch Versuche gelöst werden. Damit also der Gebrauch der Scala bei Ermittelung einer Cometenbahn sich leichter gestalte, ergiebt sich aus dem Problem selbst, dass man die Frage umkehren, d. h. die Zeit aus der Summe der Radienvectoren und der Sehne suchen müsse. Diese muss dann mit der thatsächlich beobachteten übereinstimmen.

[56] § 117. **Lehrsatz 7.** (Fig. 15.) *Wenn die Sehne MM' durch den Brennpunkt geht, dann hängt die Zeit, in welcher der Bogen MAM', den die Sehne spannt, durchlaufen wird, einzig und allein von der Länge der Sehne ab und daher ist die Lage des Brennpunktes oder seiner Entfernung von den Enden der Sehne M und M' gleichgültig.*

Beweis: In diesem Falle ist nämlich der Winkel $c = 90^0$ und daher (§ 81)

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} (a + b)^{\frac{3}{2}}.$$

Da aber $a + b = MM'$, so folgt

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} \overline{MM'}^{\frac{3}{2}}.$$

§ 118. **Zusatz 1.** Lässt man daher den Brennpunkt mit dem Anfang der Sehne zusammenfallen, so drückt diese Formel ebenfalls die Zeit des parabolischen Falles des Cometen auf die Sonne aus (§ 103).

§ 119. **Zusatz 2.** (Fig. 13.) Hieraus kann nun umgekehrt die Formel (§ 83)

$$mT = \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(\left(\frac{FN+FM+NM}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{FN+FM-NM}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

bewiesen werden. Bewegt sich nämlich der Comet von M nach N, so wird die Zeit, welche er braucht, gleich der Differenz der Zeiten, in welchen er von M und N zum Centrum [57] der Sonne gelangen würde, daher nach § 118 gleich

$$mT = \frac{1}{3\sqrt{2}}(FM^{\frac{3}{2}} - FN^{\frac{3}{2}}).$$

Nun ist aber

$$FM = \frac{FM+FN+MN}{2}$$

$$FN = \frac{FM+FN-MN}{2},$$

also kommt durch Substitution unsere Formel. Hieraus erhellt, dass dies in der That eine allgemeine Formel ist, weil die Zeit einzig und allein von der Sehne und der Summe der Radienvectoren abhängt.

§ 120. **Aufgabe 22.** (Fig. 6.) *Ist alles wie in Lemma 12 (§ 38), so finde man die Zeit, in welcher der Bogen NQ oder MQ durchlaufen wird, falls die Seiten des Dreiecks NFM gegeben sind.*

Fig. 6.

Lösung: Da die Sehne NM in G halbirt ist und QG der Axe AF parallel ist, so halbirt die Gerade QG das Segment NMQ und die Gerade FG das Dreieck FNM. Das von Geraden und Curven begrenzte Flächenstück $NQGF$ ist also die Hälfte des Sectors $NQMF$. Ziehen wir daher das Dreieck NQG ab oder addiren dasselbe, so wird

$$\text{Sector } NFQ = \tfrac{1}{2} NQMF - FQG$$
$$\text{» } MFQ = \tfrac{1}{2} NQMF + FQG.$$

[58] Nennen wir daher t und τ die Zeiten, so wird (§ 73)

$$t = \tfrac{1}{2}(NQMF - FQG) : m\sqrt{2AF}$$
$$\tau = \tfrac{1}{2}(NQMF + FQG) : m\sqrt{2AF}$$

oder wenn wir die Zeit, in der der Bogen NQM durchlaufen wird, T nennen, so wird:

$$t = \tfrac{1}{2}T - \frac{FQG}{m\sqrt{2AF}}$$

$$\tau = \tfrac{1}{2}T + \frac{FQG}{m\sqrt{2AF}}.$$

Nun ist aber die Fläche des Dreiecks

$$\triangle FQG = \tfrac{1}{2}QG \cdot GI$$

und nach der Gleichung der Parabel ist

$$GI = 2\sqrt{(QF - AF)AF}.$$

Daher

$$\frac{\triangle FQG}{\sqrt{AF}} = QG\sqrt{QF - AF}$$

oder

$$\frac{\triangle FQG}{\sqrt{AF}} = \sqrt{QF} \cdot QG \cdot \sqrt{1 - \frac{AF}{QF}}.$$

Weil aber QW und QV der Axe AF parallel sind, so wird nach § 4 und § 38

$$\sqrt{\frac{AF}{QF}} = \sin MNV = \frac{MV}{NM}$$

und daher

$$\sqrt{1 - \frac{AF}{QF}} = \frac{NV}{NM} = \frac{a-b}{k}.$$

Weiter ist

$$NM^2 = 16\,QF \cdot QG$$

oder

$$QG \cdot \sqrt{QF} = \tfrac{1}{4}NM\sqrt{QG}$$

[59] und daher nach § 45:

$$\frac{\triangle FQG}{\sqrt{AF}} = \frac{a-b}{8}\left(\left(\frac{a+b+k}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{a+b-k}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Wird also der Kürze halber die Summe der Seiten $a + b = g$ *gesetzt, so folgt:*

$$6\sqrt{2}\,mt=\left(\frac{g+k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{g-k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-3\frac{a-b}{4}\left(\left(\frac{g+k}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{g-k}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$6\sqrt{2}\,m\tau=\left(\frac{g+k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{g-k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+3\frac{a-b}{4}\left(\left(\frac{g+k}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{g-k}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

§ 121. **Aufgabe 23.** (Fig. 6.) *Wenn die Summe der Radienvectoren $NF+MF=a+b=g$ und zugleich die Zeit T, in welcher der Bogen NM durchlaufen wird, gegeben ist, so soll man die Länge der Sehne $NM=k$ ermitteln.*

Lösung: Nach der ersten Lösung von Aufgabe 15 (§ 83) hat man:

$$3\sqrt{2}\,mT=\left(g+\tfrac{1}{2}\sqrt{g^2-k^2}\right)\sqrt{g-\sqrt{g^2-k^2}}.$$

Daraus folgt:

$$6\sqrt{2}\,mT=\left(2g+\sqrt{g^2-k^2}\right)\sqrt{g-\sqrt{g^2-k^2}}$$

und weiter:

$$72m^2T^2=\left(5g^2-k^2+4g\sqrt{g^2-k^2}\right)\left(g-\sqrt{g^2-k^2}\right)$$

oder

$$72m^2T^2-g^3-3gk^2=-(g^2-k^2)^{\frac{3}{2}}.$$

[60] Setzt man nun:

$$g^2-k^2=v^2\quad\text{und}\quad -72m^2T^2+4g^3=h,$$

so folgt durch Substitution

$$v^3+3gv^2=h.$$

Wird diese Gleichung aufgelöst, so erhält man v und dann k. Wendet man die oben (§ 88) citirte Methode an, so geht diese Gleichung in die eine oder die andere der folgenden Reihenentwickelungen über:

$$v^2=g^2-k^2=\frac{h}{3g}-\frac{h^{\frac{3}{2}}}{(3g)^{\frac{5}{2}}}+\frac{3}{2}\left(\frac{h^2}{(3g)^4}-\frac{7}{4}\frac{h^{\frac{5}{2}}}{(3g)^{\frac{11}{2}}}+\frac{8\cdot10}{4\cdot6}\frac{h^3}{(3g)^7}\right.$$
$$\left.-\frac{9\cdot11\cdot13}{4\cdot6\cdot8}\frac{h^{\frac{7}{2}}}{(3g)^{\frac{17}{2}}}+\frac{10\cdot12\cdot14\cdot16}{4\cdot6\cdot8\cdot10}\frac{h^4}{(3g)^{10}}-\cdots\right)$$

oder:

$$v^3 = (g^2 - k^2)^{\frac{3}{2}} = h - 3g\,h^{\frac{2}{3}} + \tfrac{2}{3}\Big((3g)^2\,h^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{6}(3g)^3 + \frac{5\cdot 2}{6\cdot 9}\,\frac{(3g)^4}{h^{\frac{1}{3}}}$$
$$- \frac{7\cdot 4\cdot 1}{6\cdot 9\cdot 12}\,\frac{(3g)^5}{h^{\frac{2}{3}}} + * + \frac{11\cdot 8\cdot 5\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 9\cdot 12\cdot 15\cdot 18}\,\frac{(3g)^7}{h^{\frac{4}{3}}}$$
$$- \frac{13\cdot 10\cdot 7\cdot 4\cdot 1\cdot 2}{6\cdot 9\cdot 12\cdot 15\cdot 18\cdot 21}\,\frac{(3g)^8}{h^{\frac{5}{3}}} + \cdots\Big).$$

Die eine oder die andere dieser Reihen ist immer mehr oder weniger convergent, aber niemals beide zugleich.

[61] § 122. **Zusatz 1.** Da

$$v^2 = g^2 - k^2 \quad \text{und} \quad g = a + b,$$

so folgt:

$$v^2 = a^2 + b^2 - k^2 + 2ab.$$

Nun ist durch Trigonometrie

$$a^2 + b^2 - k^2 = 2ab\cos 2c.$$

Also:

$$v^2 = 2ab(1 + \cos 2c) = 4ab\cos c^2.$$

Nach § 48 wird somit

$$v = 3\sqrt{ab}\cos c = 2FE.$$

§ 123. **Zusatz 2.** Da also

$$v = 2FE$$

und

$$g = a + b = 2\overline{Fg} \quad (\S\ 40),$$

so wird

$$k^2 = g^2 - v^2 = 4(\overline{Fg}^2 - FE^2).$$

§ 124. **Zusatz 3.** Ferner wird jetzt:

$$2FE^3 + 6Fg\cdot FE^2 = 8Fg^3 - 18m^2T^2$$

oder

$$2ab\sqrt{ab}\cos c^3 + 3(a + b)ab\cos c^2 = (a + b)^3 - 18m^2T^2$$

ganz wie oben (§ 80).

§ 125. **Anmerkung.** Eine andere Reihe, durch welche direct k durch die Summe der Seiten $a + b = g$ ausgedrückt [62] wird, kann man aus jener ableiten, die wir oben gefunden

haben (§ 85), wenn man sie entsprechend umkehrt. Es ist in der That:

$$4mT = k\sqrt{g} - \frac{1}{24}\frac{k^3}{g^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{128}\frac{k^5}{g^{\frac{7}{2}}} - \frac{3}{1024}\frac{k^7}{g^{\frac{11}{2}}} - \cdots .$$

Theilt man durch $g\sqrt{g}$ und setzt $\frac{4mT}{g\sqrt{g}} = z$, so wird

$$z = \frac{k}{g} - \frac{1}{24}\left(\frac{k}{g}\right)^3 - \frac{1}{128}\left(\frac{k}{g}\right)^5 - \frac{3}{1024}\left(\frac{k}{g}\right)^7 - \cdots$$

Setzt man nun

$$\frac{k}{g} = z + \alpha z^3 + \beta z^5 + \gamma z^7 + \cdots$$

so wird:

$$\begin{aligned}\frac{1}{24}\left(\frac{k}{g}\right)^3 = \tfrac{1}{24}z^3 + \tfrac{1}{8}\alpha z^5 + \tfrac{1}{8}\alpha^2 z^7 &+ \tfrac{1}{8}\gamma z^9 + \cdots \\ + \tfrac{1}{8}\beta z^7 &+ \tfrac{1}{4}\alpha\beta z^9 + \cdots \\ &+ \tfrac{1}{24}\alpha^3 z^9 + \cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{128}\left(\frac{k}{g}\right)^5 = \frac{1}{128}z^5 + \frac{5}{128}\alpha z^7 &+ \frac{5}{64}\alpha^2 z^9 + \cdots \\ &+ \frac{5}{128}\beta z^9 + \cdots\end{aligned}$$

$$\frac{3}{1024}\left(\frac{k}{g}\right)^7 = \frac{3}{1024}z^7 + \frac{21}{1024}\alpha z^9 + \cdots$$

$$\frac{143}{98308}\left(\frac{k}{g}\right)^9 = \frac{143}{98308}z^9 + \cdots$$

[63] Also folgt:

$$\alpha = \frac{1}{24}$$

$$\beta = \frac{1}{8}\alpha + \frac{1}{128} = \frac{1}{192} + \frac{1}{128} = \frac{5}{384}$$

$$\gamma = \frac{1}{8}\alpha^2 + \frac{1}{8}\beta + \frac{5}{128}\alpha + \frac{3}{1024} = \frac{59}{9216}$$

. . . .

und daher:

$$\frac{k}{g} = z + \frac{1}{24} z^3 + \frac{5}{384} z^5 + \frac{59}{9216} z^7 + \cdots$$

oder nach Substitution des Werthes $z = \frac{4mT}{g\sqrt{g}}$

$$k = \frac{4mT}{g^{\frac{1}{2}}} + \frac{8}{3}\frac{(mT)^3}{g^{\frac{7}{2}}} + \frac{40}{3}\frac{(mT)^5}{g^{\frac{13}{2}}} + \frac{944}{9}\frac{(mT)^7}{g^{\frac{19}{2}}} + \cdots$$

Da $m = \frac{1}{n} = \frac{1}{116.2648}$ (§ 73), so ist die Reihe nur dann convergent, wenn die Zwischenzeit wenige Tage beträgt.

§ 126. **Aufgabe 24.** (Fig. 6.) *Gegeben ist der Pfeil GQ und die Zeit, in welcher der Bogen NQM durchlaufen wird; man soll die Summe der Radienvectoren $NF + MF = g$ finden.*

Lösung: Da nach § 79

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} (a + b + \sqrt{ab} \cos c) \sqrt{a + b - 2\sqrt{ab} \cos c}$$

[64] und

$$\sqrt{ab} \cos c = FE = Fg - 2QG = \frac{a+b}{2} - 2QG,$$

so wird:

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} (\tfrac{3}{2}(a + b) - 2QG) \sqrt{4QG}$$

und daher

$$a + b = g = \frac{m\sqrt{2}T}{\sqrt{QG}} + \tfrac{4}{3} QG.$$

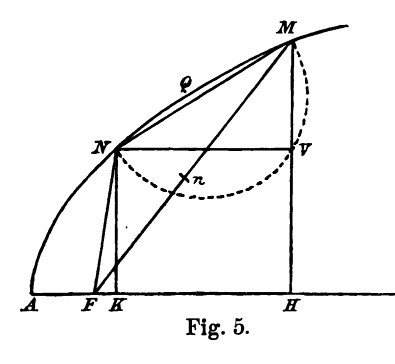


Fig. 5.

§ 127. **Aufgabe 25.** (Fig. 5.) *Gegeben ist der Halbparameter und die Ordinate NK; man soll die seit dem Perihel-durchgang verflossene Zeit bestimmen, d. h. die Zeit, in der der Bogen AN durchlaufen wird.*

Lösung: Sei $2AF = s$ der Halbparameter

und die Ordinate $NK = y$, dann wird die Fläche des Sectors AFN

$$A = \frac{y^3 + 3s^2y}{12s}.$$

Nennt man also die Zeit T, so wird (§ 73)

$$T = \frac{A}{m\sqrt{s}} = \frac{y^3 + 3s^2y}{12ms^{\frac{3}{2}}}.$$

§ 128. **Zusatz 1.** Hieraus folgt:

$$y^3 + 3s^2y = 12ms^{\frac{3}{2}}T.$$

Diese Gleichung kann, wenn der Kürze halber

$$12ms^{\frac{3}{2}}T = q$$

[65] gesetzt wird, in folgende Reihe entwickelt werden:

$$y = \frac{1}{3}\frac{q}{s^2} - \frac{1}{3^4}\frac{q^3}{s^8} + \frac{3}{3^7}\frac{q^5}{s^{14}} - \frac{3 \cdot 8}{2 \cdot 3^{10}}\frac{q^7}{s^{20}} + \\ + \frac{3 \cdot 11 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 3^{13}}\frac{q^9}{s^{26}} - \frac{3 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3^{16}}\frac{q^{11}}{s^{32}} + \cdots.$$

§ 129. **Zusatz 2.** Aehnlich wird nach der *Cardan*ischen Formel:

$$\frac{y}{\sqrt{s}} = \sqrt[3]{6mT + \sqrt{36m^2T^2 + s^3}} + \sqrt[3]{6mT - \sqrt{36m^2T^2 + s^3}}.$$

§ 130. **Zusatz 3.** Da $AK = \frac{y^2}{2s}$, $NF = \frac{y^2}{2s} + \frac{s}{2}$ ist, so wird, wenn die Ordinate y gegeben ist, auch leicht die Abscisse AK gefunden und damit der Radiusvector oder die heliocentrische Distanz FN und hieraus dann weiter der Winkel NFH, da

$$\sin NFH = KN : FN.$$

§ 131. **Aufgabe 26.** (Fig. 1.) *Gegeben ist die Periheldistanz AF und der Radiusvector FN; man soll die seit dem Periheldurchgang verflossene Zeit finden.*

Lösung: Da allgemein (§ 79)

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}}(a + b + \sqrt{ab}\cos c)\sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}\cos c},$$

[66] so wird in unserem Falle:

$$a = FN, \quad b = AF, \quad \sqrt{ab} = FS, \quad c = AFS$$

und

$$\sqrt{ab}\cos c = AF,$$

also:

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}}(FN + 2AF)\sqrt{FN - AF}.$$

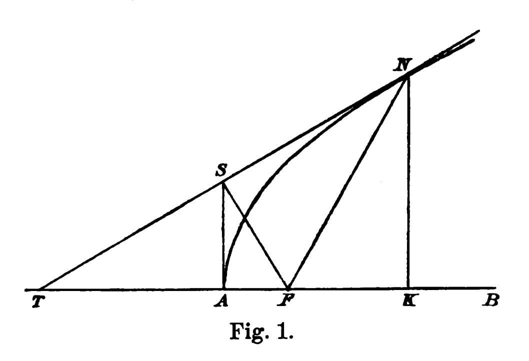


Fig. 1.

§ 132. **Zusatz 1.** Hiernach wird also wiederum:

$$18m^2T^2 = FN^3 + 3FN^2 \cdot AF - 4AF^3$$

oder

$$FN^3 + 3AF \cdot FN^2 = 18m^2T^2 + 4AF^3.$$

§ 133. **Zusatz 2.** Da nach der Natur der Parabel

$$FN = AF + AK$$

so folgt durch Substitution:

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}}(AK + 3AF)\sqrt{AK}$$

und daher:

$$AK^3 + 6AK^2 \cdot AF + 9AK \cdot AF^2 = 18m^2T^2.$$

§ 134. **Aufgabe 27.** (Fig. 1.) *Gegeben ist die Perihel-distanz AF und der Winkel NFA; man soll die Perihelzeit finden.*

[67] Lösung: Wird $AF = f$, Winkel $AFS = SFN = c$ genannt, so wird (§ 2)

$$AS = f\,\text{tang}\,c = \tfrac{1}{2}NK = \tfrac{1}{2}y;$$

also:

$$y = 2r\,\mathrm{tang}\,\varphi$$

oder, wenn der Halbparameter s ist

$$y = s\,\mathrm{tang}\,\varphi.$$

Nun ist aber § 127

$$T = \frac{y^3 + 3s^2 y}{12 m s^{\frac{3}{2}}}.$$

also folgt durch Substitution:

$$T = \frac{s\sqrt{s}}{12 m}\left(\mathrm{tang}\,\varphi^3 + 3\,\mathrm{tang}\,\varphi\right).$$

§ 135. **Zusatz.** Hieraus folgt nach der Cardanischen **Formel:**

$$\mathrm{tang}\,\varphi\cdot\sqrt{s} = \sqrt[3]{6mT + \sqrt{36m^2T^2 + s^3}} + \sqrt[3]{6mT - \sqrt{36m^2T^2 + s^3}}.$$

§ 136. **Aufgabe 28.** (**Fig. 12.**) *Man gebe diejenige Periheldistanz oder denjenigen Halbparameter an, bei welchem der Comet am längsten innerhalb der Bahn eines gegebenen Planeten verweilt.*

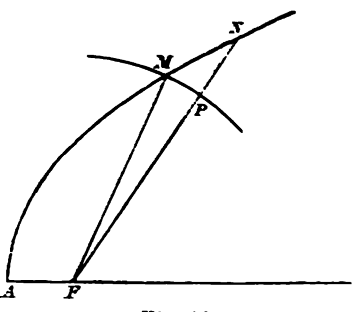


Fig. 12.

Lösung: Sei F das Centrum der Sonne, AM die Bahn des Cometen, A dessen Perihel, MP die Bahn des Planeten, so wird die [68] Zeit, innerhalb welcher der Bogen MA durchlaufen wird, die halbe Aufenthaltsdauer innerhalb der Bahn MP darstellen. Es wird also sein (§ 132)

$$18m^2T^2 = FM^3 + 3FM^2\cdot AF - 4AF^3.$$

Durch Differenziren erhält man:

$$0 = 36m^2 T dT = 3FM^2 dAF + 12AF^2 dAF.$$

Es muss also sein

$$4AF^2 = FM^2 \quad \text{oder} \quad FM = 2AF$$

Es muss also der Halbparameter der Parabel gleich sein der heliocentrischen Distanz des Planeten, damit der Aufenthalt des Cometen innerhalb der Planetenbahn ein Maximum werde.

§ 137. **Aufgabe 29.** (Fig. 12.) *Man soll die Zeit des längsten Aufenthaltes eines in einer Parabel sich bewegenden Cometen innerhalb einer gegebenen Planetenbahn berechnen.*

Da

$$18m^2T^2 = FM^3 + 3FM^2 \cdot AF - 4AF^3$$

und für die Maximaldauer

$$\tfrac{1}{2}FM = AF$$

ist, so folgt durch Substitution:

$$18m^2T^2 = FM^3(1 + \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}) = 2FM^3$$

und daher

$$T = \tfrac{1}{3}nFM^{\frac{3}{2}}.$$

Dies ist die grösste halbe Dauer und daher die ganze:

$$\tfrac{2}{3}nFM^{\frac{3}{2}}.$$

§ 138. **Zusatz.** Da die Zeit des kürzesten Aufenthaltes nach § 103, 105 ist:

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\,nFM^{\frac{3}{2}},$$

[69] so erhellt, dass *die Maximaldauer zur Minimaldauer sich wie* $\sqrt{2}$ *zu* 1 *verhält.*

§ 139. **Anmerkung 1.** Wenn wir für die Distanz FM die mittleren Entfernungen der Planeten nehmen, so wird die Maximalzeit, die ein in einer Parabel sich bewegender Comet sich innerhalb der Planetenbahnen aufhalten kann, gefunden zu

Für	♄	2282.66	Tage
»	♃	919.28	»
»	♂	145.80	»
»	♁	77.50	»
»	♀	47.66	»
»	☿	18.67	»

§ 140. **Anmerkung 2.** Die Maximal- und Minimaldauer des Aufenthaltes kann mit der Umlaufszeit der Planeten auf folgende Weise verglichen werden. Die Umlaufszeit ist (§ 75)

$$\frac{\pi}{m} FM^{\frac{3}{2}},$$

die kürzeste Dauer $\frac{\sqrt{2}}{3m} FM^{\frac{3}{2}},$

die längste Dauer $\frac{2}{3} FM^{\frac{3}{2}}.$

Die Umlaufszeit eines Planeten verhält sich also zur kürzesten Aufenthaltsdauer eines Cometen wie 3π zu $\sqrt{2}$ (rund wie 20 zu 3) und zur längsten wie 3π zu 2 (rund wie 33 zu 7).

---

[70] Dritter Theil.

Die scheinbare Cometenbewegung. Verschiedene Methoden, eine parabolische Cometenbahn aus den Beobachtungen zu bestimmen.

§ 141. **Definition 3.** *Unter den Elementen einer Cometenbahn versteht man die Stücke, durch welche sich die Bahn eines Cometen von allen anderen unterscheidet.*

§ 142. **Anmerkung 1.** In zwei Punkten stimmen alle Bahnen überein, nämlich dass sie Kegelschnitte sind und dass ihr Brennpunkt mit dem Mittelpunkte der Sonne zusammenfällt. Dagegen giebt es sechs Stücke, durch welche sich die Bahnen von einander unterscheiden, nämlich:

1) Die Distanz der Periheles von der Sonne.

2) Das Verhältniss dieser Distanz zum Halbparameter, oder was auf dasselbe hinauskommt, die Umlaufszeit, wenn die Bahn elliptisch oder kreisförmig ist.

[71] 3) Die Zeit, zu der der Comet im Perihel oder in einem bestimmten Punkte seiner Bahn sich befindet.

4) Die Neigung der Bahn gegen die Ebene der Ekliptik.

5) Die Lage der Knotenlinie oder die heliocentrische Länge des aufsteigenden Knotens.

6) Die Entfernung der Axe der Bahn von der Knotenlinie oder die heliocentrische Länge des Periheles.

Durch die beiden ersten Stücke wird die Art des Kegelschnittes und seine Grösse bestimmt, durch das dritte die

Epoche und durch die drei letzten die Lage der Bahn zur Ekliptik. Sind diese Stücke gegeben, so kann jeder Comet von allen anderen unterschieden werden.

§ 143. **Anmerkung 2.** Um diese sechs Stücke zu bestimmen, braucht man drei Beobachtungen oder drei geocentrische Oerter, nämlich drei Längen und drei Breiten, gemessen von der Erde aus. Es steht aber fest, dass der Theil der Bahn, welchen der Comet durchläuft, während er den Erdbewohnern sichtbar ist, sehr klein ist. Daraus folgt, dass das zweite Element, die Umlaufszeit, aus drei nahe benachbarten Beobachtungen kaum bestimmt werden kann. Wenn aber ein schon früher beobachteter Comet wiederkehrt, so wird hierdurch die Umlaufszeit bekannt und damit ist dann auch die grosse Axe der Ellipse genau definirt (§ 72).

§ 144. **Anmerkung 3.** Ferner hat man durch Beobachtungen constatirt, dass die Bahnen der Cometen, wenn sie überhaupt elliptisch sind, sehr langgestreckt sind, so dass jener sehr kleine Theil, welchen sie während ihrer Sichtbar- [**72**] keitsdauer durchlaufen, ohne nennenswerthen Fehler als Theil einer parabolischen Bahn angesehen werden kann. Da nämlich die Umlaufszeit meistens mehrere Jahrhunderte beträgt, so muss das Aphelium ungeheuer weit von der Sonne entfernt sein. Dagegen befinden sich die Perihele derjenigen Cometen, welche uns sichtbar werden, fast immer innerhalb der Erdbahn, sind also der Sonne sehr nahe. Daraus folgt, dass das Verhältniss zwischen der Periheldistanz und dem Halbparameter sich fast nicht von dem bei der Parabel stattfindenden unterscheidet.

§ 145. **Lehrsatz 8.** (Fig. 15.) *Wenn ein in einer Parabel sich bewegender Comet in beiden Knoten N und N' von der Erde in E bez. E' beobachtet wird, so ist hierdurch die Lage und Grösse der Knotenlinie, die Periheldistanz und die Lage der Axe gegeben, dagegen bleibt die Neigung der Bahn unbekannt.*

Beweis: Wenn nämlich die Punkte der Ekliptik gegeben sind, in denen der Comet von der Erde aus gesehen dieselbe schneidet, so ist damit die Lage der Geraden EN und $E'N'$ bekannt. Da ferner das Zeitintervall gegeben ist, in welchem der Comet von N nach N' gelangt, so ist damit die Entfernung der Knotenpunkte oder die Strecke NN' bekannt; es ist nämlich nach § 117:

$$NN'^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{2}\, m\, T.$$

Die Frage kommt also darauf hinaus, dass durch das Centrum F der Sonne eine Gerade so gelegt werde, dass auf ihr von den Geraden EN und $E'N'$, die ihrer Lage nach gegeben sind, ein Stück von bekannter Länge abgeschnitten werde. Ist diese Gerade gefunden, so ist damit die Lage der Axe und die Periheldistanz, also die ganze Parabel ermittelt. Da hingegen die beobachteten Punkte N und N' in der Ebene der [73] Ekliptik liegen, so kann aus ihnen allein die Neigung nicht abgeleitet werden, die also unbestimmt bleibt.

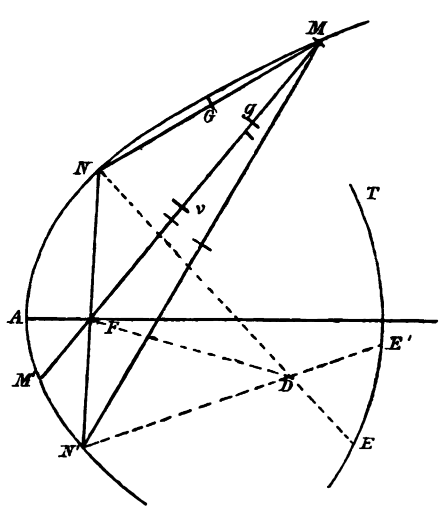


Fig. 15.

§ 146. **Zusatz.** Wenn aber eine dritte Beobachtung dazukommt, so wird hierdurch nicht nur die Neigung bekannt, sondern man kann auch angeben, welche von den vier Lösungen des Problems der Wirklichkeit entspricht.

§ 147. **Anmerkung.** Von diesem Theorem kann man ausserordentlich selten Gebrauch machen; zumeist nämlich ist entweder einer der Knoten zu weit von der Erde entfernt oder man kann den Cometen wegen zu grosser Nähe an der Sonne nicht sehen, während er in demselben steht.

§ 148. **Lehrsatz 9.** *Wenn ein Comet von der Erde aus zweimal beobachtet wird und man weiss, dass er sich zur Zeit*

der einen Beobachtung im Perihel seiner parabolischen Bahn befunden habe, so ist die ganze Bahn und ihre Lage gegeben.

Beweis: Wenn man nämlich die geocentrische Distanz für jene Beobachtung, welche zur Zeit des Periheldurchganges angestellt ist, annimmt, so ist hiermit die heliocentrische Distanz, d. h. die Periheldistanz, und die Lage der Axe gegeben. Hierdurch aber ist dann die Bahn und die Winkelentfernung des Cometen vom Perihel für die Zeit der zweiten Beobachtung oder der Punkt N gegeben. Wenn also die Parabel um die Axe rotirt, so muss der Punkt N in diejenige Gerade fallen, [**74**] welche vom zweiten Ort der Erde nach dem zweiten Ort des Cometen gezogen wird und deren Lage bekannt ist. Tritt dies ein, so ist die angenommene geocentrische Distanz die richtige; tritt es nicht ein, so muss man so lange eine andere annehmen, bis sie der Bedingung genügt. Da dies nothwendig irgend einmal geschehen muss, so ist folglich das Problem ein bestimmtes und zwei Beobachtungen genügen zur Bestimmung der Cometenbahn, wenn die eine zur Zeit des Periheldurchganges angestellt ist.

§ 149. **Anmerkung.** (Fig. 6.) Dieser Satz kann auf zwei beliebige Cometenörter N und M ausgedehnt werden, wenn der eine oder der andere der Winkel RMF oder RNF gegeben ist, unter welchen die Bahn die Radienvectoren FM und FN schneidet.

§ 150. **Lehrsatz 10.** *Wenn auf der scheinbaren Himmelskugel durch den Ort der Sonne und durch den geocentrischen Ort des Cometen ein grösster Kreis gezogen wird, so geht dieser auch durch den Ort der Erde und durch den heliocentrischen Ort des Cometen.*

Beweis: Jener grösste Kreis ist nämlich der Schnitt der Himmelssphäre mit einer Ebene, welche durch das Centrum der Sonne, der Erde und des Cometen geht. Daher liegen die Geraden, welche jene Centra verbinden, in dieser Ebene, und schneiden bis zur scheinbaren Sphäre verlängert auf dieser die heliocentrischen Oerter der Erde und des Cometen und die geocentrischen Oerter der Sonne und des Cometen aus, wie unser Satz behauptet.

[**75**] § 151. **Zusatz.** Da der Comet sich in einer Ebene bewegt, die durch das Centrum der Sonne geht, so liegen aus demselben Grunde die einzelnen heliocentrischen Oerter des Cometen in einem grössten Kreise der Sphäre.

§ 152. **Anmerkung.** (Fig. 7.) Dieser Satz kann von Nutzen sein, wenn man eine brauchbare Formel findet, welche das Verhältniss zwischen den Winkeln NFQ, QFM und den Zeiten, die zum Durchlaufen der Bogen NQ und QM gebraucht werden, ausdrückt. Diese Winkel sind nämlich Bogen des Kreises, auf welchen die heliocentrischen Oerter des Cometen liegen, und werden von den Kreisen, die durch die Oerter der Sonne und die geocentrischen Oerter des Cometen gelegt werden, ausgeschnitten.

§ 153. **Aufgabe 30.** (Fig. 8.) *Gegeben sind vier Beobachtungen eines Cometen, die in kurzen Zeitintervallen aufeinander folgen; man soll Lage und Grösse der Bahn durch successive Annäherung finden, wenn diese als parabolisch vorausgesetzt wird.*

Lösung: Weil wegen der kleinen Zwischenzeit der Bogen, welchen der Comet von der ersten bis zur vierten Beobachtung durchläuft, als eine Gerade betrachtet werden kann, die mit gleichmässiger Geschwindigkeit durchlaufen wird, so kann man die vier beobachteten Oerter, projicirt auf die Ekliptik, durch die vier Punkte H, I, K, L darstellen. Sind weiter EH, EI, AK und AL die Geraden, die von den Oertern der Erde nach den Oertern des Cometen gezogen werden, so sind diese durch die geocentrischen Längen des Cometen ihrer Lage nach gegeben. Nun erinnern wir uns [76] an Lemma 18 (§ 51), wonach eine Gerade HL so gezogen werden kann, dass sie von den ihrer Lage nach gegebenen Geraden EH, EI, AK und AL so geschnitten wird, dass die drei Theile LK, KI, IH proportional den Zwischenzeiten werden. Ist die Gerade construirt, so behalten wir nur die beiden äussersten Punkte H und L bei, errichten in ihnen Senkrechte und erhalten auf diesen mit Hülfe der geocentrischen Breiten zwei Punkte der

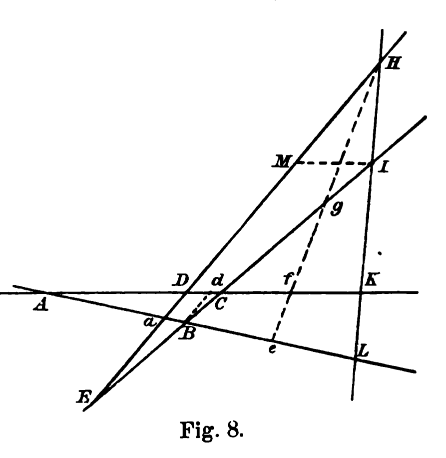


Fig. 8.

Cometenbahn, die nicht viel von den wirklichen abweichen. Nach Lemma 8 (§ 26) ist dadurch die ganze Bahn gegeben. Da aber nach Aufgabe 15 (§ 83) damit gleichzeitig die Zwischenzeit gefunden werden kann, so kann man prüfen, ob sie mit der beobachteten übereinstimmt oder mehr oder weniger abweicht. Tritt letzteres ein, was sogar die Regel sein muss, so suche man mit Hülfe der ermittelten Bahn jene Oerter des Cometen, in welchen er zu den Zeiten der zwischenliegenden Beobachtungen hätte sein müssen, wenn die beobachteten Zeiten mit den berechneten vertauscht werden. (Fig. 9.) Hierdurch wird ein Viereck $EFGH$ bekannt, welches von dem, das die wahren Cometenörter bilden, viel weniger abweichen wird, wie die zuerst angenommene Gerade. Dieses Viereck muss man auf die Ekliptik projiciren; dann hat man, indem man die Winkel und das Verhältniss der Seiten festhält, ein ähnliches Viereck den vier ihrer Lage nach gegebenen Geraden AE, AG, BF, BH einzuschreiben, was mit Hülfe von Lemma 19 (§ 54) gelingt. Behält man dann wiederum nur die beiden äussersten Punkte E und H bei, so kann aus ihnen wie oben die Bahn ermittelt werden, die nun von der wahren gewiss weniger abweichen wird. Da man in dieser Weise beliebig lange fortfahren kann, so wird schliesslich die Bahn gefunden, welche der Wahrheit entspricht.

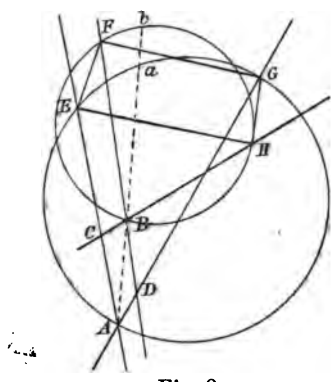


Fig. 9.

[77] § 154. **Anmerkung.** (Fig. 7.) Von der Hypothese, die wir eben benutzt haben, nämlich, dass der Comet sich auf gerader Linie mit gleichmässiger Geschwindigkeit bewege, kann auch noch auf andere Weise Gebrauch gemacht werden. Sind N und M die beiden äusseren Cometenörter und NM die Sehne zwischen beiden, so wird vorausgesetzt, dass die Sehne vom Cometen durchlaufen werde und dass er sich zur Zeit, einer zwischenliegenden Beobachtung, wo er sich thatsächlich in dem Punkte Q der Bahn befunden hat, in dem Punkte E (Schnitt von FQ mit NM) befinde. Hieraus entspringen zwei Uebelstände. Zuerst nämlich hat der Punkt E eine andere

geocentrische Länge und Breite, wie der thatsächlich beobachtete Ort Q des Cometen und dann sind die Zeiten, in welchen die Bogen MQ und QN durchlaufen werden, den Abschnitten der Sehne ME und EN nicht vollständig proportional. Es erhellt jedoch aus Lemma 17 (§ 49, 50), dass die Verhältnisse zwischen den Flächen der Sectoren NFQ und QFM und den Abschnitten NE und EM sich sehr wenig voneinander unterscheiden, wenn der Winkel NFM 20° bis 30° nicht überschreitet. Dem zweiten Uebelstand begegnet man also dadurch, dass man zuerst die Abschnitte NE und EM als proportional den Zeiten annimmt. Hierdurch wird die Bahn sehr nahe bestimmt und man kann dann das Verhältniss zwischen den Abschnitten NE und EM genauer angeben, so dass nun die eigentliche Rechnung beginnen kann. Dem ersten Uebelstand kann man auf verschiedene Weise abhelfen. Man bestimmt nämlich (wie *Euler* gethan hat) aus dem Mittel zwischen den beiden äusseren Distanzen NF und MF, das durch Versuch zu ermitteln ist, und aus den Zeiten, in denen die Bogen MQ und QN durchlaufen werden, sehr nahe den Pfeil QE aus dem Fall der Körper gegen die Sonne. Wenn jene Zeiten nahe gleich sind, so wird der grösste Pfeil $QG = QE$ durch [78] die Formel § 92 gefunden, die als sehr nahe zutreffend angewendet werden kann. Da man nun mit dem Punkte E insofern viele Mühe hat, als die von ihm nach dem Centrum der Erde gezogene Gerade auf die Ekliptik projicirt werden muss, so wird es dem Vorhaben förderlicher sein, wenn man an Stelle der Ekliptik eine andere Ebene einführt, die der Aufgabe anzupassen ist. Es ist leicht einzusehen, dass zu dem Ende die Projectionen der vom Centrum der Erde nach den Punkten Q und E gezogenen Geraden auf jene Ebene zusammenfallen müssen. Dieser Bedingung genügt aber jede Ebene, welche senkrecht zu der Ebene angenommen wird, die durch die zur selben Zeit gehörigen Oerter von Sonne, Erde und Comet gelegt wird. Um dies noch einleuchtender zu machen und zugleich eine Methode der Cometenbahnbestimmung auseinanderzusetzen, behandeln wir die folgende

§ 155. **Aufgabe 31.** (Fig. 16.) *Gegeben sind drei geocentrische Oerter eines in einer Parabel sich bewegenden Cometen; man soll Lage und Grösse der Bahn ermitteln.*

Lösung: Es seien D, C, E die senkrechten Projectionen der drei Cometenörter auf die Ebene der Ekliptik. Die Erde befinde sich zu denselben Zeiten in A, T, B. Nach dem mittleren Ort

T der Erde ziehen wir von der Sonne S die Gerade ST und errichten hierauf die Normale TR. Auf diese fällen wir von den beiden äusseren Oertern der Erde A und B die Normalen $A\alpha$ und $B\beta$ und ebenso von den Projectionen der Cometenörter D, C, E die Normalen DRH, CQK, EPG. Es seien ferner RH, QK, PG gleich den senkrechten Abständen der Cometenörter von der Ekliptik. Endlich ziehen wir die Geraden αH, TK und βG.

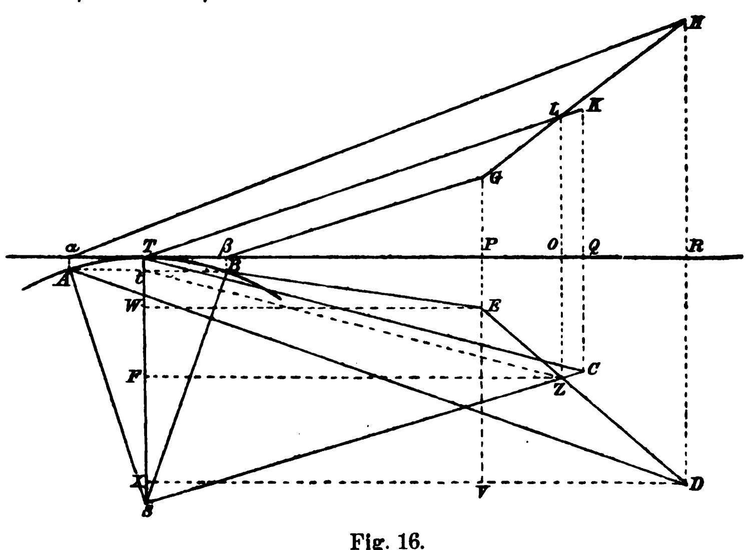


Fig. 16.

[79] Nach dieser Construction kann die Ebene αRHG als senkrecht zur Ebene der Ekliptik αRDS und besonders zur Geraden TS angesehen werden, und sie enthält die orthographische Projection der Oerter der Erde α, T, β, und des Cometen H, K, G. Es ist nun klar, dass die Gerade TK nicht nur die Projection der Geraden ist, welche vom mittleren Ort der Erde nach dem Ort des Cometen gezogen wird, der senkrecht über C steht, sondern auch jener Geraden, die aus dem Centrum der Sonne nach demselben Cometenort gezogen wird und damit der ganzen Ebene, in welcher sich zu derselben Zeit Sonne, Comet und Erde befinden.

Da nun die Geraden AD, TC, BE durch die geocentrischen Längen des Cometen ihrer Lage nach bekannt sind, ebenso

TS durch die Länge der Sonne oder der Erde zur Zeit der mittleren Beobachtung, und AS und BS durch die Längen der Sonne zu den Zeiten der äusseren Beobachtungen, so sind damit erstens gegeben die Strecken

$$\alpha T = AS \sin TSA$$
$$\beta T = BS \sin TSB;$$

zweitens sind die Winkel ADR, TCQ und BEP die Differenzen zwischen den Längen des Cometen und der Länge der Sonne zur Zeit der mittleren Beobachtung, also ebenfalls bekannt und es wird sein

$$\alpha R = AD \sin ADR$$
$$TQ = TC \sin TCQ$$
$$\beta P = BE \sin BEP.$$

Seien ferner λ, λ', λ'' die geocentrischen Breiten des Cometen in A, T, B, so wird

$$RH = AD \operatorname{tang} \lambda$$
$$QK = TC \operatorname{tang} \lambda'$$
$$PG = BE \operatorname{tang} \lambda''.$$

Daraus folgt:

$$\operatorname{tang} H\alpha R = \frac{\operatorname{tang} \lambda}{\sin ADR}$$
$$\operatorname{tang} KTQ = \frac{\operatorname{tang} \lambda'}{\sin TCQ}$$
$$\operatorname{tang} G\beta P = \frac{\operatorname{tang} \lambda''}{\sin BEP}.$$

[80] Es sind also in der angenommenen Normalebene jetzt bekannt

die Strecken αT, $T\beta$, $\alpha\beta$

und die Winkel $H\alpha R$, KTQ, $G\beta P$,

die wir wie folgt bezeichnen wollen:

$$\alpha T = g, \quad \beta T = h,$$
$$\measuredangle H\alpha R = \alpha, \quad \measuredangle KTQ = \tau, \quad \measuredangle G\beta P = \beta.$$

Verbindet man die Punkte G und H, so ist die Gerade GH die Projection der Sehne, deren Bogen vom Cometen in dem

Intervall der Zeit zwischen den äusseren Beobachtungen durchlaufen wird. Da TK die Projection des mittleren Radiusvectors ist, so ist LK die Projection des Pfeiles und die Zwischenzeiten stehen sehr nahe im Verhältniss:

$$GL : LH = PO : OR = p : q.$$

Wenn es sich nach vollendeter Rechnung lohnt, dieselbe nochmals zu wiederholen, so kann dieses Verhältniss leicht genauer angenommen werden. Macht man nun

$$TO = x, \quad PO = y$$

so wird

$$OR = y\frac{q}{p}$$

und ferner:

$$OL = x \operatorname{tang} \tau$$

$$\alpha R = g + x + y\frac{q}{p}$$

$$\beta P = x - h - y$$

$$HR = \left(g + x + y\frac{q}{p}\right) \operatorname{tang} \alpha$$

$$PG = (x - h - y) \operatorname{tang} \beta.$$

Nun ist aber

$$(OL - GP) : (RH - OL) = p : q,$$

[81] also

$$qx \operatorname{tang} \tau - q(x - h - y) \operatorname{tang} \beta = p\left(g + x + \frac{q}{p}y\right) tg\,\alpha - px \operatorname{tang} \tau$$

oder nach gehöriger Reduction:

$$y = \frac{(q+p)\operatorname{tang}\tau - q\operatorname{tang}\beta - p\operatorname{tang}\alpha}{q(\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta)}x + \frac{qh\operatorname{tang}\beta - pg\operatorname{tang}\alpha}{q(\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta)}.$$

Da diese Formel numerisch zu berechnen ist, setzen wir kurz

$$y = \gamma x + \delta.$$

Es ist also $y = PO$ durch $x = TO$ gegeben. — Daraus folgt weiter

$$\beta P = x - \gamma x - \delta - h$$

$$\alpha R = x + \frac{q}{p}\gamma x + \frac{q}{p}\delta + g$$

und daher

$$PE = TW = (x - \gamma x - \delta - h) \operatorname{cotg} BEP + \beta B$$

$$RD = TX = \left(x + \frac{q}{p}\gamma x + \frac{q}{p}\delta + g\right) \operatorname{cotg} ADR + A\alpha\,.$$

Da aber auch diese Formeln numerisch berechnet werden müssen, so machen wir

$$\frac{TW + TX}{2} = TF = \varkappa x + \mu$$

$$TX - TW = WX = \nu x + \varrho = EV$$

$$FS = TS - TF = \varphi x + \omega\,.$$

[82] Ferner ist

$$WE = TP = x - \gamma x - \delta$$

$$XD = TR = x + \frac{q}{p}\gamma x + \frac{q}{p}\delta$$

und hieraus:

$$VD = \frac{q+p}{p}(\gamma x + \delta) = \varepsilon x + \eta\,.$$

Da aber

$$VE = \nu x + \varrho\,,$$

so folgt

$$ED^2 = (\varepsilon^2 + \nu^2)x^2 + (2\varepsilon\eta + 2\nu\varrho)x + \eta^2 + \varrho^2\,.$$

Ferner ist:

$$GP = (x - \gamma x - \delta - h) \operatorname{tang} \beta$$

$$RH = \left(x - \frac{q}{p}\gamma x + \frac{q}{p}\delta + g\right) \operatorname{tang} \alpha$$

und daraus kann die Differenz der senkrechten Abstände des Cometen über der Ekliptik zur Zeit der äusseren Beobachtungen, nämlich $RH - GP$ dargestellt werden durch

$$rx + s\,.$$

Damit ist nun das Quadrat der Länge der Sehne zu ermitteln, welche der Comet überspannt:

$$ED^2 + (RH - GP)^2 = Ax^2 + Bx + C\,.$$

Da

$$WE = x - \gamma x - \delta$$

$$XD = x + \frac{q}{p}\gamma x + \frac{q}{p}\delta\,,$$

so wird:

$$\frac{WE + XD}{2} = FZ = Dx + E.$$

Hierzu

$$FS = \varphi x + \omega$$

[**83**] giebt die Hälfte der Summe der äusseren heliocentrischen Distanzen des Cometen zu:

$$\sqrt{(\varphi x + \omega)^2 + (Dx + E)^2 + LO^2}.$$

Aus dieser Grösse, aus der Länge der Sehne und aus der Zeit, die zwischen den äusseren Beobachtungen liegt, kann x durch die Aufgabe 15 (§ 83) ermittelt werden. Wenn die Sehne klein ist, wird sehr nahe:

$$Ax^2 + Bx + C = \frac{8m^2 T^2}{\sqrt{(\varphi x + \omega)^2 + (Dx + E)^2 + LO^2}},$$

welches eine Gleichung 6. Grades in x ist.

Ist $x = TO$ gefunden, so folgt leicht $y = PO$ und dann OR und alle Grössen, welche zur Bestimmung der Lage der auf die Ekliptik projicirten Sehne ED und der Lage der Sehne selbst nothwendig sind. Da die äusseren Radienvectoren

$$b = \sqrt{SW^2 + WE^2 + TG^2}$$
$$a = \sqrt{SX^2 + XD^2 + RH^2}$$

sind, so kann die ganze Bahn durch Lemma 8, 10, 11 und 11, Zusatz 1 bestimmt werden.

Lösung durch Construction: Da nun auch durch diese recht weitläufige Rechnung die Bahn des Cometen nur genähert bestimmt wird, so kann man, wenn man diese nicht durchführen will, die ganze Sache auch kürzer und bequemer durch Construction erledigen.

Sei S der Mittelpunkt der Sonne, T der Ort der Erde zur Zeit der mittleren Beobachtung, B und A die Oerter derselben zur Zeit der ersten und dritten Beobachtung. Mit Hülfe der bekannten geocentrischen Längen des Cometen ziehe man die [**84**] Geraden TC, BE, AD. Nachdem man dann TR senkrecht zu TS gezogen hat, fälle man $A\alpha$ und $B\beta$ wie in der vorigen Lösung und ähnlich werden entweder durch Rechnung oder durch Construction die Winkel $G\beta P$, KTQ und $H\alpha R$ gefunden; endlich wird wie zuvor TK die Projection der vom

Centrum der Sonne und der Erde nach dem mittleren Cometenort gezogenen Geraden sein.

Nun nehme man auf der Geraden TK einen beliebigen Punkt L an, welcher dem Schnittpunkte der Sehne mit dem mittleren Radiusvector entsprechen soll. Wenn dieser Punkt zufällig richtig angenommen worden ist, so wird die wahre Cometenbahn bestimmt sein; im anderen Falle wird die Abweichung bekannt und es wird ein anderer Punkt durch Versuch auszuwählen sein. Die Construction ist für alle Fälle dieselbe; damit also die Figur nicht zu sehr mit Geraden belastet werde, haben wir die wahre Lage des Punktes L angenommen, ihn aber sonst als noch ungewissen behandelt.

Durch L werde die Gerade GLH so geführt, dass die Theile GL und LH sich wie die Zwischenzeiten verhalten; sodann werden von G und H die Lothe GPE und HRD auf die Linie αR gefällt und bis zum Schnitt mit den früher gezogenen Geraden BE und AD verlängert. Damit erhält man ED, die Projection der Sehne auf die Ekliptik.

Aus dem angenommenen Punkte L werde ebenfalls das Loth auf αR gefällt; nennt man Z den Schnittpunkt mit ED, so wird sein

$$GL : LH = EZ : ZD.$$

Ist nun der Punkt L richtig angenommen worden, so müssen die drei Punkte S, Z, C in einer und derselben Geraden liegen, welche die Projection des mittleren Radiusvectors auf [85] die Ekliptik ist. Da dies aber noch nicht sicher ist, so verbinde man die Oerter A, B der Erde und ziehe aus dem Schnittpunkte t mit dem mittleren Radiusvector der Erde die Gerade tZ nach dem Punkte Z. Diese Gerade ist von der Beschaffenheit, dass sie für jede beliebige Lage der auf die Ekliptik projicirten Sehne dieselbe in demselben Verhältnisse schneidet, in welchem die Gerade EZD geschnitten wird, d. h. sehr nahe im Verhältniss der Zwischenzeiten.

Nimmt man daher auf der Geraden tT beliebige Punkte Z an, so können leicht ebensoviele Gerade EZD gezogen werden, die von den Geraden AD, BE, tZ in dem gegebenen Verhältnisse der Zwischenzeiten geschnitten werden.

Hat man ED, so werden mit Heranziehung der geocentrischen Breiten in den Punkten E und D Normale errichtet, deren Längen gleich GP und HK sind. Die Endpunkte derselben müssen um die Länge der Sehne von einander abstehen

und ihre Verbindungslinien mit der Sonne stellen die äusseren Radienvectoren dar. Mit diesen Distanzen bestimme man nun unter Anwendung der Formeln der Aufgabe 15 (§ 83) oder der Scala der parabolischen Geschwindigkeiten (§ 112 ff.) die Zeit, in welcher der Comet die mit Hülfe des angenommenen Punktes Z bestimmte Sehne hätte durchlaufen müssen. Wenn diese Zeit mit der zwischen der ersten und dritten Beobachtung liegenden Zeit übereinstimmt, dann war der Punkt Z richtig angenommen, wenn nicht, so merke man die Differenz und nehme in der Geraden tZ nacheinander andere Punkte Z an. Daraus erhält man ebensoviele Differenzen der beobachteten und der durch Construction gefundenen Zeit. Trägt man die Distanzen tZ als Abscissen und die Differenzen der Zeiten als Ordinaten auf, so kann eine Curve gezogen werden, welche die [**86**] Gerade tZ an der Stelle schneiden wird, die dem wahren Punkte Z entspricht. Selbstverständlich sind die Punkte Z so anzunehmen, dass die genannten Differenzen sowohl positiv als negativ werden.

Ist nun der richtige Punkt Z gefunden, so wird die Construction der wahren Projection ED der Sehne gemacht und damit die Construction der ganzen Bahn sehr leicht zum Abschluss gebracht.

Durch diese Construction kann man aber auch sehr leicht einer Prüfung unterwerfen, ob das Verhältniss zwischen den Theilen GL und LH den Zwischenzeiten proportional ist oder merklich davon abweicht. Ist letzteres der Fall, so kann man das Verhältniss genauer bestimmen und dann entweder die Construction oder die Rechnung einschlagen, um Grösse und Lage der Bahn genau zu ermitteln.

§ 156. **Anmerkung 1.** Diese Construction der Bahn wird weitläufig in Folge der Neigung der Bahn gegen die Ekliptik. In Folge dieser nämlich muss man die Abstände des Cometen von den Punkten E und D auf doppelte Weise auf die Ebene der Ekliptik übertragen, damit man die Länge der Sehne und der äusseren Radienvectoren bestimmen könne. Uebrigens wird diese Weitläufigkeit, durch die Ersparniss an Arbeit, welche man bei der Berechnung der Zwischenzeit aus der Benutzung der Scala der parabolischen Geschwindigkeiten ziehen kann, zum grossen Theil compensirt.

§ 157. **Anmerkung 2.** Da bei der zweiten Lösung der Punkt Z durch Versuche zu ermitteln ist, so werden einige

[**87**] Anhaltspunkte hierfür nicht für unnütz erachtet werden. Zu diesem Behufe dient der Lehrsatz 3 (§ 76 ff.), mittelst dessen aus der heliocentrischen Distanz des Cometen seine Geschwindigkeit bestimmt werden kann und durch den diese Geschwinkeit mit der eines in gleicher Entfernung befindlichen, auf einer Kreisbahn sich bewegenden Planeten verglichen wird. Da der Bogen oder die Sehne zwischen der ersten und dritten Beobachtung meistens klein ist, so wird die vom Cometen durchmessene Sehne mit jener, welche in derselben Zeit die Erde durchläuft, also mit AB in irgend einer Weise verglichen werden können. Nehmen wir an, der Comet sei in T, so ist klar, dass die von ihm durchlaufene Sehne sehr nahe $\sqrt{2}AB$ (§ 76) sein müsste, was aber nicht sein kann, da sie zwischen den Geraden AD und BE liegen muss. Wenn nun der Punkt Z auf der Geraden tZ so angenommen wird, dass seine Distanz von der Sonne kleiner wird, als eben, so wird die Länge der Sehne vergrössert, welche er durchlaufen müsste. Man wird also Z erst dort annehmen dürfen, wo die Distanz von der Sonne anfängt grösser zu werden. Ist Z angenommen, so wird die Lage der projicirten Sehne meist schon nach dem Augenmaass allein nahe richtig gewählt und ihre Länge mit AB und der Entfernung von der Sonne verglichen.

§ 158. **Aufgabe 32.** (Fig. 17.) *Man soll eine schon nahe bekannte parabolische Bahn eines Cometen verbessern.*

[**88**] Lösung: Da die curtirten geocentrischen Distanzen AD, TC, BE in nahe richtigen Zahlen vorliegen, so wollen wir annehmen, sie seien zu klein, und die Differenzen, welche addirt werden müssen, damit sie in die wahren Werthe übergehen, seien so klein, dass ausser der ersten alle höheren Potenzen vernachlässigt werden können. Dann ist es erlaubt sie wie Differenziale zu behandeln, die bei der in Zahlen auszuführenden Rechnung hinzuzufügen sind. Die Rechnung selbst aber wird damit zu beginnen haben, dass aus den angenommenen Distanzen die Zeiten zwischen der ersten und zweiten, der zweiten und dritten, der dritten und ersten Beobachtung ermittelt werden. Dann werden die berechneten Zeiten mit den beobachteten verglichen, wodurch man zu drei Gleichungen kommt, aus welchen die Differenzen zwischen den angenommenen und den wahren Distanzen AD, TC, BE ermittelt werden können, die nun addirt oder subtrahirt werden müssen, je nachdem sie positiv oder negativ sind.

Die Herstellung jener Gleichungen aber wollen wir durch folgendes Beispiel zeigen.

Sei S die Sonne, T und t Oerter der Erde, K und k Projectionen der beiden Cometenörter C und c auf die Ekliptik, dann werden TK und tk durch die geocentrischen Längen

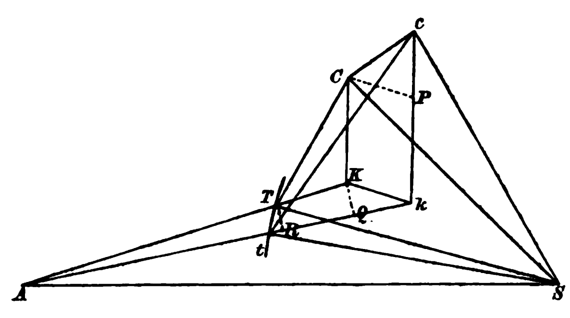


Fig. 17.

gegeben sein und die Winkel CTK und ctk sind die geocentrischen Breiten. Nun verlängert man TK und tk bis zu ihrem Schnittpunkt in A, verbindet A mit S und zieht CP parallel zu Kk. Setzt man dann

$$\begin{array}{llll} AT = \alpha & AK = K & CTK = C & TS = T \\ At = \beta & Ak = k & ctk = c & tS = \tau \\ TAt = \omega & TK = K' & CTS = e & \\ & tk = k' & ctS = f & \end{array}$$

[89] so wird:

$$\overline{Cc}^2 = K^2 + k^2 - 2Kk\cos\omega + K'^2\operatorname{tang} C^2 + k'^2\operatorname{tang} c^2$$
$$- 2K'k'\operatorname{tang} C\operatorname{tang} c.$$

Weiter ist:

$$\overline{CS}^2 = T^2 + K'^2\sec C^2 - 2TK'\sec C\cos e$$
$$\overline{cS}^2 = \tau^2 + k'^2\sec c^2 - 2\tau k'\sec c\cos f.$$

Diese Ausdrücke sind in Zahlen zu berechnen. Da ihnen aber Differenziale hinzuzufügen sind, so bemerken wir, dass die Grössen K, K', k, k' als variabel betrachtet werden müssen, und zwar sind, da

$$K = K' + \alpha$$
$$k = k' + \beta$$

die Differenziale dK, dK' und ebenso dk, dk' nicht etwa gleich, sondern man wird durch Differenziation haben:

$$d\overline{Cc} = \frac{1}{\overline{Cc}}(K + K' \operatorname{tang} C^2 - k \cos\omega - k' \operatorname{tang} c \operatorname{tang} C)\, dK$$

$$+ \frac{1}{\overline{Cc}}(k - K \cos\omega + k' \operatorname{tang} c^2 - K' \operatorname{tang} c \operatorname{tang} C)\, dk$$

$$d\overline{CS} = \frac{1}{\overline{CS}}(K' \sec C^2 - T \sec C \cos c)\, dK$$

$$d\overline{cS} = \frac{1}{\overline{cS}}(k' \sec c^2 - \tau \sec c \cos f)\, dk\,.$$

Da diese Ausdrücke wieder in Zahlen berechnet werden müssen, schreiben wir kurz

$$d\overline{Cc} = m dK + n dk$$

$$d\overline{CS} = p dK$$

$$d\overline{cS} = q dk\,.$$

Durch $\overline{Cc}$, $\overline{CS}$, $\overline{cS}$ ist aber die Zwischenzeit gegeben nach der Formel (§ 83):

$$3\sqrt{2m}\mathrm{T} = \left(\frac{\overline{CS} + \overline{cS} + \overline{Cc}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{\overline{CS} + \overline{cS} - \overline{Cc}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Da nun die angenommenen curtirten geocentrischen Distanzen TK und tk von den wahren verschieden sind, so wird auch die Zwischenzeit T, welche diese Formel giebt, von der beobachteten [**90**] verschieden sein. Damit also T zur beobachteten Zwischenzeit werde, muss man der Formel ihr Differenzial hinzufügen, womit sie wird

$$3\sqrt{2m}\mathrm{T} = \left(\frac{\overline{CS} + \overline{cS} + \overline{Cc}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{\overline{CS} + \overline{cS} - \overline{Cc}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$+ \tfrac{3}{2}(\overline{CS} + \overline{cS} + \overline{Cc})^{\frac{1}{2}}(d\overline{CS} + d\overline{cS} + d\overline{cC})$$

$$- \tfrac{3}{2}(\overline{CS} + \overline{cS} - \overline{Cc})^{\frac{1}{2}}(d\overline{CS} + d\overline{cS} - d\overline{cC})\,.$$

$\overline{CS}$, $\overline{cS}$, $\overline{cC}$ sind in Zahlen gegeben, ebenso auch ihre Differenziale durch dK und dk; man hat also auf diese Weise eine Gleichung zwischen dK und dk erhalten.

Nimmt man zu den hier benutzten Oertern noch den dritten hinzu, so erhält man auf dieselbe Weise zwei weitere Gleichungen zwischen dk und $d\mathfrak{k}$ einerseits und dK und $d\mathfrak{k}$ andererseits und kann also dann die drei Differenzen dK, dk, $d\mathfrak{k}$ bestimmen. Sollten sie nach vollendeter Rechnung als beträchtlich sich herausstellen, so wird die Rechnung auf dieselbe Weise wiederholt, indem man jetzt für die in Fig. 16 mit AD, TC, BE bezeichneten Diztanzen die durch die erste Verbesserung corrigirten Werthe annimmt.

§ 159. **Aufgabe 34.***) (Fig. 17.) *Wenn zwei hinlänglich nahe geocentrische Oerter des Cometen gegeben sind und ausserdem die geocentrische Distanz des Cometen für eine der beiden Beobachtungen, so soll man die Lage und Grösse der Bahn ermitteln.*

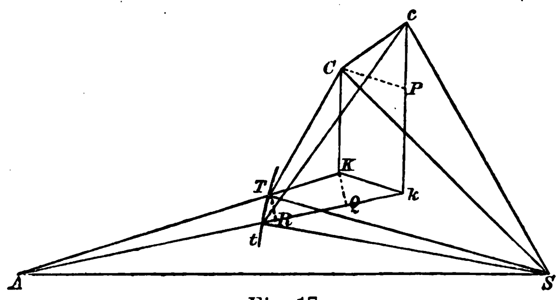


Fig. 17.

Lösung: Sei S das Centrum der Sonne, T, t Oerter der Erde, C, c Oerter des Cometen, K, k deren Projectionen auf die Ekliptik. Dann sind TK und tk durch die beobachteten Längen gegeben und die Winkel CTK und ctk sind die beobachteten Breiten. Es möge nun noch die Distanz TC und damit auch $TK = TC \cos CTK$ gegeben sein. Von den Punkten K und T fällen wir auf die Gerade tK die Normalen [91] KQ und TR und ziehen ferner wie bei der vorigen Aufgabe AS und CP. Sodann setzen wir:

$$\begin{array}{ll} TK = x & CTK = \lambda \\ Qk = y & ctk = \varLambda \\ tR = \alpha & TAt = \omega \\ AT = p & CTS = h \\ TS = r & \end{array}$$

*) Aufgabe 33 fehlt im Original.

Da die geocentrischen Breiten λ und Λ wenig von einander verschieden sind, werde gesetzt:

$$\operatorname{tang}\Lambda = \operatorname{tang}\lambda + q;$$

dann sind y, α, q, ω hinlänglich kleine Grössen, da wir T, t bez. C, c als nahe beisammen liegende Oerter angenommen haben.

Es wird also sein:

$$\overline{AK} = x + p$$
$$\overline{KQ} = (x + p)\sin\omega$$
$$\overline{Kk}^2 = y^2 + (x + p)^2 \sin\omega^2,$$

ferner:

$$\overline{AR} = p\cos\omega$$
$$\overline{AQ} = (x + p)\cos\omega$$
$$\overline{Ak} = (x + p)\cos\omega + y$$
$$\overline{Rk} = (x + p)\cos\omega - p\cos\omega + y = x\cos\omega + y$$
$$\overline{tk} = x\cos\omega + y - \alpha$$

und daher

$$\overline{ck} = (x\cos\omega + y - \alpha)(\operatorname{tang}\lambda + q)$$
$$\overline{CK} = x\operatorname{tang}\lambda.$$

Mithin

$$\overline{cP} = x(\cos\omega - 1)\operatorname{tang}\lambda + (y - \alpha)\operatorname{tang}\lambda + xq\cos\omega + (y - \alpha)q$$

oder

$$\overline{cP} = y(\operatorname{tang}\lambda + q) - \alpha(\operatorname{tang}\lambda + q) - x(1 - \cos\omega)\operatorname{tg}\lambda + xq\cos\omega.$$

[92] Für diese Formel schreiben wir der Kürze halber

$$\overline{cP} = Ay + Bx - C.$$

Es ist aber

$$\overline{Cc}^2 = \overline{cP}^2 + \overline{Kk}^2.$$

Daher wird

$$\overline{Cc}^2 = y^2 + (x + p)^2 \sin\omega^2 + A^2y^2 + 2AByx + C^2 - 2ACy - 2BCx + B^2x^2$$

oder

$$\overline{Cc}^2 = Dy^2 + Ey + F.$$

Weiter wird sein

$$\overline{CS}^2 = r^2 + x^2 \sec\lambda^2 - 2rx \sec\lambda \cos h.$$

Nach der zweiten Lösung der Aufgabe 15 (§ 83) ist

$$3\sqrt{2m}\,T = \frac{k\left(a + b + \frac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2 - k^2}\right)}{\sqrt{a + b + \sqrt{(a+b)^2 - k^2}}}$$

oder, da die Sehne k klein und auch sehr nahe $a = b$ ist,

$$3\sqrt{2m}\,T = \frac{3k\sqrt{a}}{2}$$

$$k = \frac{\sqrt{8m}\,T}{\sqrt{a}}$$

oder

$$\overline{Cc} = \frac{\sqrt{8m}\,T}{\sqrt{\overline{CS}}}$$

und daher nach Substitution der Werthe

$$Dy^2 + Ey + F = \frac{8m^2T^2}{\sqrt{r^2 + x^2 \sec\lambda^2 - 2rx \sec\lambda \cos h}}.$$

Aus dieser Gleichung kann, wenn die Distanz x gegeben ist, y gefunden werden und damit die Lage der projicirten Sehne Kk. Ist dies aber erreicht, so kann die ganze Bahn leicht ermittelt werden.

[**93**] § 160. **Anmerkung.** Da die Gleichung, auf welche wir schliesslich gekommen sind, quadratisch ist, so ergeben sich zwei Werthe von y und es muss daher eine dritte Beobachtung zugezogen werden, um entscheiden zu können, welche der Wirklichkeit entspricht. Weiter nahmen wir an, dass die Distanz x gegeben sei. Wenn sie aber unbestimmt ist, so kann man nach einander verschiedene Werthe dafür einsetzen, bis schliesslich y imaginär herauskommt. Es werden hierdurch die Grenzen gegeben, über welche die Distanz x nicht hinausgehen kann und sie werden gefunden, wenn man in der letzten Gleichung $y = 0$ setzt. Die Gleichung geht dadurch in eine andere über, in welcher x in der sechsten Potenz auftritt.

§ 161. **Aufgabe 35.** (Fig. 18.) *Gegeben sei die Lage einer parabolischen Cometenbahn; man soll die Lage und die Eigenschaften der auf die Ekliptik projicirten Bahn ermitteln.*

Lösung: Sei F das Centrum der Sonne und daher der Brennpunkt der Bahn, Nn die Knotenlinie, NQn die Bahn selbst, die gegen die Ebene der Ekliptik unter einem beliebigen Winkel geneigt ist, A sei das Perihel, AFB die Axe. Wird ein beliebiger Punkt Q angenommen und QP senkrecht zu Nn gefällt und das Verhältniss QP zu qP gleich dem Verhältniss von 1 zum Cosinus der Neigung gemacht, so wird der Punkt q in der projicirten Bahn liegen und der Punkt Q wird senkrecht darüber liegen.

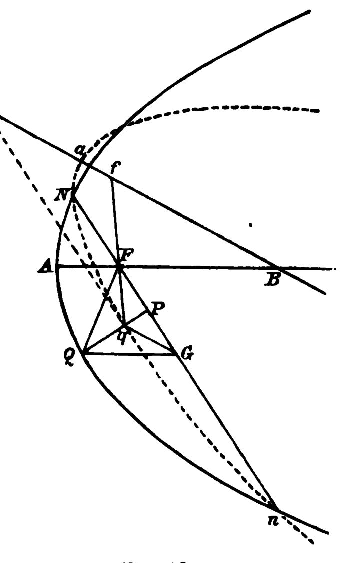


Fig. 18.

[94] Wenn Q der höchste Punkt der Bahn über der Ekliptik ist, dann wird die Richtung beider Parabeln in Q und q der Knotenlinie parallel sein. Halbirt man Nn in G und zieht FQ, Fq, GQ, Gq, so wird GQ der Axe AB und Gq der Axe der projicirten Bahn aB parallel und es ist $FQ = QG$, $Fq = qG$, $FP = PG$. Weiter verhält sich FQ zu Fq wie 1 zum Cosinus der heliocentrischen Breite jenes höchsten Punktes Q.

Da $NG = Gn$ und Gq der Axe aB parallel ist, so geht die Gerade qF durch den Brennpunkt f der projicirten Bahn und es ist:

$$\overline{Nn}^2 = 16 FQ^2 = 16 Fq \cdot fq$$

und daher

$$Fq : FQ = FQ : fq\,.$$

Da aber beide Parabeln in Q und q der Knotenlinie Nn parallel sind, so werden die Winkel, welche sie mit FQ bez. Fq bilden, den Winkeln QGF bez. qGF gleich und daher wird:

$$AF = FQ \sin QGF^2 = \frac{PQ^2}{FQ}$$

$$af = fq \sin q\, GF^2 \quad = \frac{fq \cdot Pq^2}{Fq^2}:$$

Nennt man η die Neigung der Bahn, so ist

$$Pq = PQ \cos \eta$$

und daher

$$af = \frac{fq \cdot PQ^2 \cos \eta}{Fq^2},$$

also ferner

$$AF : af = Fq^2 : FQ \cos \eta^2 \cdot fq.$$

Es ist aber

$$fq = \frac{FQ^2}{Fq}$$

also:

$$AF : af = Fq^3 : FQ^3 \cos \eta^2.$$

[95] Da $\frac{Fq}{FQ}$ der Cosinus der heliocentrischen Breite des Punktes Q ist, so wird, wenn wir diese mit λ bezeichnen:

$$AF : af = \cos \lambda^3 : \cos \eta^2$$

$$\sqrt{af} = \frac{\sqrt{AF} \cdot \cos \eta}{\cos \lambda^{\frac{3}{2}}}.$$

Wird vom Radiusvector eine beliebige Fläche beschrieben, die wir A nennen wollen und ist die dazu gebrauchte Zeit T, so wird

$$T = \frac{A}{m\sqrt{2AF}}.$$

Da aber diese Fläche in der projicirten Bahn verkleinert ist im Verhältniss $1 : \cos \eta$, so wird sie sein $A \cos \eta = D$. Da nun

$$T = \frac{A}{m\sqrt{2AF}} = \frac{A \cos \eta}{m\sqrt{2af} \cos \lambda^{\frac{3}{2}}}$$

so folgt

$$T = \frac{D}{m\sqrt{2af} \cos \lambda^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Zeit wird also gegeben durch die auf die Ekliptik projicirte Fläche $D_{,}$. durch den Halbparameter der projicirten Bahn $2af$ und durch den Cosinus der heliocentrischen Breite des höchsten Punktes Q.

§ 162. **Aufgabe 36.** (Fig. 18.) *Gegeben sei die projicirte Bahn aqn; man soll die wahre Bahn NQn finden und deren Neigung und Knotenlinie.*

[96] Lösung: Es sei $aNqn$ die projicirte Bahn, ihre Axe af, ihr Brennpunkt f, und das Centrum der Sonne F. Da F der Brennpunkt der wahren Bahn ist, so führe man die Gerade fFq durch beide Brennpunkte, ziehe die Tangente tq und zu ihr die Parallele NFn durch den Mittelpunkt der Sonne F; das wird dann die Knotenlinie sein. Fällt man auf diese die Normale QqP und macht $FQ = \frac{1}{4}Nn$, so wird der Punkt Q der höchste Punkt der wahren Bahn sein und $\frac{qP}{QP}$ der Cosinus der Neigung. Endlich mache man $QG = QF$ oder $NG = Gn$, und ziehe zu QG die Parallele AF, dann ist dies die Axe der wahren Bahn. Da $AF = \frac{PQ^2}{FQ}$ (§ 161), so ist damit auch die Periheldistanz AF gefunden.

§ 163. **Lehrsatz 11.** *Die projicirte Bahn ist durch lauter geocentrische Längen gegeben und fünf Beobachtungen sind zu ihrer Bestimmung erforderlich.*

Beweis: Die projicirte Bahn ist bestimmt, sobald der Scheitel a und der Brennpunkt f gegeben sind oder die Lage dieser beiden Punkte in Bezug auf eine Gerade, die von einem gegebenen Ort der Erde nach dem Centrum der Sonne gezogen wird. Es hängt daher diese Lage von vier zu diesem Ende anzunehmenden Unbekannten ab. Sind aber diese angenommen, so wird die Knotenlinie nN gegeben sein (§ 162), ferner die Distanz af und die beiden Geraden FQ und Fq und dann $Fq : FQ = \cos\lambda$ (§ 161). Da nun diese vier angenommenen Unbekannten durch geocentrische Längen und durch die in der projicirten Bahn zurückgelegten Räume zu bestimmen sind, [97] so werden diese Räume gegeben sein, welche mit den verflossenen Zeiten verglichen werden können (§ 161) und jeder Raum führt zu einer Gleichung. Weil nun aber vier Gleichungen nöthig sind, so braucht man auch vier projicirte Räume und daher fünf beobachtete geocentrische Längen.

§ 164. **Lehrsatz 12.** *Wenn sich ein Comet zur Zeit einer Beobachtung im Pol der Ekliptik befindet, so ist die projicirte Bahn durch drei weitere geocentrische Längen bestimmt.*

Beweis: Wenn nämlich der Ort des Cometen im Pol der Ekliptik auf diese projicirt wird, so fällt dieser Punkt auf den Ort, wo sich zur selben Zeit die Erde befindet. Welches daher auch Lage und Grösse der projicirten Bahn sein möge, jedenfalls muss sie durch diesen Ort der Erde hindurchgehen. Es ist also ein gewisser bestimmter Punkt der Bahn gegeben. Daraus folgt, dass aus vier anzunehmenden Unbekannten eine als überflüssig ausscheidet, wodurch die Zahl der Räume und damit der beobachteten Längen vermindert wird.

§ 165. **Anmerkung 1.** Es versteht sich von selbst, dass wenn der Comet im Pol der Ekliptik stationär gewesen ist, dann die projicirte Bahn bereits bestimmt sein wird, wenn man diesen zwei Beobachtungen eine dritte hinzufügt. Uebrigens wird die Rechnung, durch welche die Bahn bestimmt wird, auf eine wunderbare Weise complicirt, so dass man es unter allen [**98**] Umständen vorzieht, die geocentrischen Breiten zugleich mit den Längen zur Bestimmung der Bahn anzuwenden.

§ 166. **Anmerkung 2.** Was wir bisher über die Projection der Cometenbahn auf die Ekliptik gesagt haben, gilt allgemein, da die Projection auf die Ebene der Ekliptik rein willkürlich ist und man auch eine beliebige andere Ebene wählen kann, deren Lage gegen die Ekliptik gegeben ist. Diese tritt dann an die Stelle der Ekliptik und auf sie sind die Oerter der Erde zu projiciren und ebenso die Geraden, welche von diesen nach den Oertern des Cometen gezogen sind, wie wir dies schon bei der Aufgabe 31 (§ 155) durch ein Beispiel erläutert finden. Ebenen dieser Art, welche zur Abkürzung der Rechnung beitragen können, giebt es mehrere. So bringt uns z. B. die Ebene, welche durch die Centra von Sonne, Erde und Comet geht, dieselbe Vereinfachung, wie die Ekliptik, wenn der Comet sich in einem seiner Knoten befindet. Und ähnlich bietet uns die Ebene, welche auf der von dem Centrum der Erde nach dem Cometen gezogenen Geraden senkrecht steht, einen Fall dar, der analog ist zu jenem von Lehrsatz 12 (§ 164).

§ 167. **Lehrsatz 13.** *Wenn ein Comet derartig stationär ist, dass er viermal an demselben Orte des Himmels beobachtet wird, so kann seine Bahn ohne alle Rechnung gefunden werden.*

[**99**] Beweis: Wenn er nämlich stationär ist, so sind die Geraden, die von den Oertern der Erde nach den Oertern des Cometen gezogen werden, parallel. Nimmt man daher eine Ebene, die durch das Centrum der Sonne geht und auf jenen Geraden senkrecht steht, so sind in dieser Ebene vier Punkte der auf sie projicirten Bahn gegeben. Da diese parabolisch ist, so kann sie construirt werden. Durch die Aufgabe 36 (§ 162) wird dann weiter Lage und Grösse der wahren Bahn gegeben.

§ 168. **Anmerkung.** Es wird allerdings kaum jemals ein Comet viermal an derselben Stelle des Himmels beobachtet werden, wenn die Zwischenzeiten beträchtlich sind. Sind sie aber kurz, so muss man sehr genaue Beobachtungen haben, wenn man auf diese Weise die wahre Bahn ermitteln will. Man wird aber doch eine angeben können, welche von der wahren wenig abweicht, wenn die scheinbare Bewegung des Cometen sehr langsam ist.

§ 169. **Lehrsatz 14.** (Fig. 19.) *Wenn ein Comet zweimal an derselben Stelle des Himmels beobachtet wird, so fallen die Geraden, welche von den beiden Erdörtern nach den beiden Cometenörtern gezogen werden, in die Knotenlinie.*

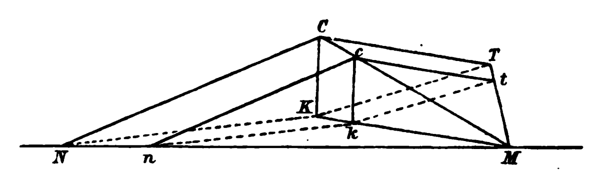


Fig. 19.

Beweis: Seien T und t die Oerter der Erde, C und c die des Cometen. Von letzteren fälle man auf die Ebene die Normalen CK und ck und ferner die Normalen CN und cn auf die Knotenlinie Nn. Dann ziehe man die Geraden NK, [**100**] nk, TK, tk, CcM, TtM. Da nun der Comet stationär ist, so sind die Geraden TC und tc und ebenso TK und tk parallel; überdies sind die Breiten CTK und ctk einander gleich. Daraus folgt:

$$CK:ck = CT:ct = KT:kt = CM:cM = TM:tM = KM:kM,$$

also schneiden sich die Geraden Tt, Cc, Kk in M. Weiter ist:

$$CK:ck = CN:cn = Kn:kn = CM:cM = KM:kM = NM:nM,$$

also geht die Gerade Nn durch denselben Punkt M, in dem sich Cc, Kk, Tt schneiden. Es ist also Nn die Knotenlinie, woraus sich die Behauptung ergiebt.

§ 170. **Lehrsatz 15.** *Wenn ein Comet sich in der Ebene der Ekliptik bewegt und seine Bahn ist eine parabolische, so genügen drei geocentrische Längen, um dieselbe zu bestimmen; dagegen ist noch eine vierte nothwendig, wenn er sich in einer Ellipse bewegt, ausser wenn deren grosse Axe bekannt ist.*

Beweis: Dass drei Längen zur Bestimmung der parabolischen Bahn genügen, erhellt aus Aufgabe 31 (§ 155) und die Construction der Bahn wird hier noch leichter. Dagegen, wenn diese drei Längen zur Parabel nothwendig sind, so kommt bei der Ellipse noch das Verhältniss zwischen der Periheldistanz und dem Halbparameter dazu; dieses bliebe unbestimmt, wenn nicht eine vierte Beobachtung dazukäme, ausser es ist die Länge der grossen Axe bekannt oder was dasselbe ist, die Umlaufszeit.

[101] § 171. **Anmerkung.** Ist die parabolische Bahn gegen die Ekliptik geneigt, so sind drei Beobachtungen erforderlich, aber nicht vollständig; man kann entweder die Zeit, zu der die zweite Beobachtung angestellt ist, oder die geocentrische Länge oder die Breite entbehren. Wenn nichtsdestoweniger drei vollständige Beobachtungen herangezogen werden, so hat man mehr Daten als nöthig sind und die überflüssigen können zur Vereinfachung der Rechnung oder wenigstens zur Controle derselben benutzt werden.

---

[102] Vierter Theil.

Eigenschaften der elliptischen Bahnen der Cometen und Planeten.

§ 172. **Lemma 23.** (Fig. 20.) *Wenn in einer Ellipse drei aequidistante Ordinaten PN, QL, RM genommen werden und man zieht aus dem Brennpunkt F die Radienvectoren FN, FL, FM, so ist $2FL = FN + FM$.*

Beweis: Nach der Natur der Ellipse ist nämlich

$$FN = AF + \frac{AB - 2AF}{AB} AP$$

$$FM = AF + \frac{AB - 2AF}{AB} AR,$$

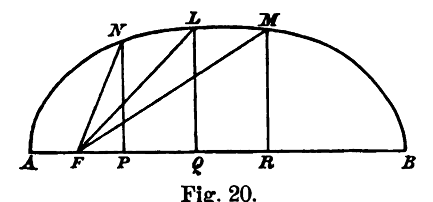


Fig. 20.

daher:

$$FN + FM = 2AF + \frac{AB - 2AF}{AB}(AP + AR).$$

[103] Nun ist nach der Voraussetzung:

$$AP + AR = 2AQ,$$

daher

$$FN + FM = 2\left(AF + \frac{AB - 2AF}{AB} AQ\right) = 2FL.$$

§ 173. **Lemma 24.** (Fig. 21.) *Wenn in einer Ellipse $AQBD$ ein beliebiger Punkt Q angenommen und durch ihn der Durchmesser QCD, ferner die Tangente QT und zu ihr eine beliebige Parallele NGM gezogen wird, dann der Brennpunkt F mit Q durch die Gerade QFb verbunden und die Strecke NM senkrecht in die Lage nEm übertragen wird, so dass $nE = Em$ ist, dann liegen die Punkte n und m ebenfalls auf einer Ellipse $Qnbm$, deren einer Brennpunkt gleichfalls F, und deren grosse Axe Qb der grossen Axe der ersten Ellipse gleich ist.*

Beweis: Da QCD ein Durchmesser der Ellipse und die Strecke NM der Tangente QT parallel ist, so findet nach einer bekannten Eigenschaft der Kegelschnitte zwischen der Abscisse QG und der Ordinate NM eine analoge Gleichung statt, wie zwischen Abscissen in der grossen Axe und darauf senkrecht stehenden Ordinaten. Weil nun nach der Construction $NM = nm$ und QE dieselbe Rolle hat wie QG, ferner nm senkrecht steht auf FQ, so wird zwischen QE und nm dieselbe Gleichung in Bezug auf die Ellipse statthaben, deren grosse Axe Qb ist. Zieht man also Cc parallel zu QT und

errichtet $eq = fC$ senkrecht zur Axe QC, so wird eq die kleine Halbaxe sein. Wird nun

$$AB = a, \quad AF = f, \quad FQ = z$$

(104) gesetzt und die Gerade Qf nach dem zweiten Brennpunkt f gezogen, so wird der Winkel $TQF = 90^0 - \frac{1}{2}FQf$ und

$$FQ + Qf = a$$
$$Qf = a - z$$
$$Ff = a - 2f.$$

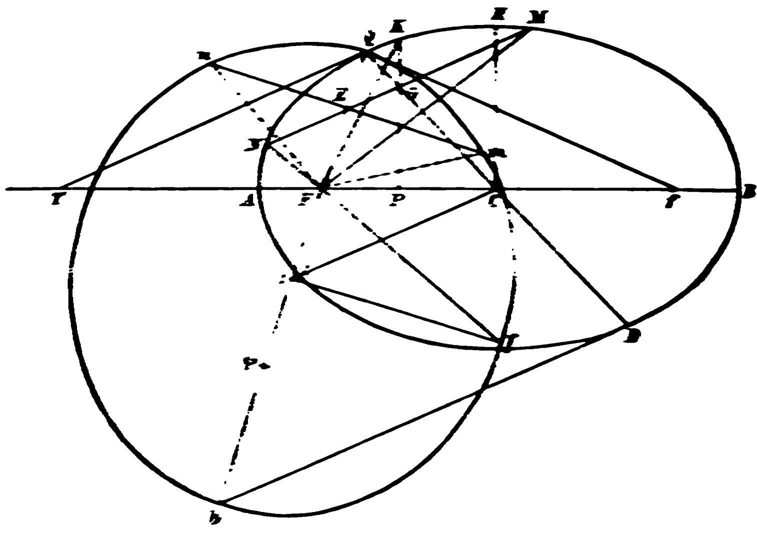


Fig. 2.

Heraus folgt nach trigonometrischen Formeln:

$$\cos\tfrac{1}{2}FQf = \sin TQF = \sin QeC = \frac{\sqrt{af - f^2}}{\sqrt{az - z^2}}$$

$$\cos TQF = \cos QeC = \frac{\sqrt{az - z^2 - af + f^2}}{\sqrt{az - z^2}}.$$

$$\cos QFC = \frac{az - 2(af - f^2)}{z(a - 2f)}$$

$$\sin QFC = \frac{2\sqrt{af - f^2}}{z(a - 2f)}\sqrt{az - z^2 - af + f^2}$$

und es wird daher, weil $QTC = QFC - TQF = FCc$,

$$\sin FCc = \frac{(a - 2z)\sqrt{af - f^2}}{(a - 2f)\sqrt{az - z^2}}.$$

Es ist aber

$$Fc : \sin FCc = FC : \sin QcC$$

und daher, wenn die gefundenen Werthe substituirt werden und reducirt wird:

$$FC = \tfrac{1}{2}a - f$$
$$Fc + z = Qc = \tfrac{1}{2}a$$
$$Qb = a = AB.$$

Es ist weiter der conjugirte Halbmesser $Cc' = c\gamma = \sqrt{az - z^2}$ und daher wegen $\overline{F\gamma}^2 = \overline{Fc}^2 + \overline{c\gamma}^2$

$$\overline{F\gamma}^2 = (\tfrac{1}{2}a - z)^2 + (az - z^2) = \tfrac{1}{4}a^2$$
$$\overline{F\gamma} = \tfrac{1}{2}a = Qc.$$

Daraus erhellt, dass F Brennpunkt in beiden Ellipsen ist.

[105] § 174. **Zusatz 1.** Aehnlich erhält man den Halbmesser

$$QC = \sqrt{\tfrac{1}{4}(a - 2z)^2 + af - f^2} = \sqrt{\overline{Fc}^2 + \overline{CH}^2}$$

und weiter:

$$\sin QCc = \frac{a\sqrt{af - f^2}}{2\sqrt{az - z^2}\,\sqrt{\tfrac{1}{4}(a - 2z)^2 + af - f^2}}.$$

§ 175. **Zusatz 2.** Da in der Ellipse AHB:

$$GM^2 = \frac{QG \cdot GD \cdot Cc'^2}{QC^2}$$

und in der Ellipse $Q\gamma b$:

$$\frac{QG \cdot GD}{QC^2} = \frac{QE \cdot Eb}{Qc^2},$$

so wird:

$$GM^2 = Em^2 = \frac{QE \cdot Eb \cdot Cc'^2}{Qc^2}.$$

§ 176. **Zusatz 3.** Wird daher $FE = \xi$ gesetzt, so wird:

$$Em^2 = \frac{[az - a\xi - (z - \xi)^2](az - z^2)}{\tfrac{1}{4}a^2}$$

$$Fm = \frac{2(az - z^2) - (a - 2z)\xi}{a}.$$

§ 177. **Lemma 25.** (Fig. 21.) *Wird alles wie im vorigen Lemma angenommen, und werden noch die Radienvectoren Fn, Fm, FN, FM gezogen, so ist die Summe der ersteren $Fn + Fm$ gleich der Summe der letzteren $FN + FM$.*

[**106**] Beweis. Man ziehe durch den Punkt G die Gerade PGK senkrecht zur grossen Axe AB, und verbinde K mit dem Brennpunkt F. Da $NG = GM$, so wird nach Lemma 23 (§ 172)

$$2FK = FN + FM.$$

Da ferner $Fn = Fm$, so ist nachzuweisen, das $Fn = FK$ ist.

Weil nun TQ, EG und cC parallel sind, so wird

$$cQ : QC = cE : GC$$

$$CG = \frac{QC \cdot cE}{cQ}$$

oder nach Substitution der Werthe:

$$CG = \frac{(\xi + \tfrac{1}{2}a - z)\sqrt{\tfrac{1}{4}(a-2z)^2 + af - f^2}}{\tfrac{1}{2}a}.$$

Weiter ist durch Trigonometrie

$$\cos QCF = \frac{QC^2 + CF^2 - QF^2}{2QC \cdot CF}$$

$$CP = CG \cos QCF,$$

also nach Substitution der Werthe

$$\cos QCF = \frac{\tfrac{1}{2}a(a-2z)}{(a-2f)\sqrt{\tfrac{1}{4}(a-2z)^2 + af - f^2}}$$

$$CP = \frac{(a-2z)(2\xi + a - 2z)}{2(a-2f)}.$$

Hieraus:

$$PF = FC - CP = \frac{(a-2f)^2 - (a-2z)^2 - 2(a-2z)\xi}{2(a-2f)}.$$

Es ist aber nach der Natur der Ellipse

$$FK = \frac{2(af - f^2)}{a} + \frac{a-2f}{a}FP$$

[**107**] und daher nach Substitution und gehöriger Reduction

$$FK = \frac{2(az - z^2)}{a} - \frac{(a-2z)\xi}{a}.$$

Denselben Werth aber haben wir für den Radius Fm (§ 176) erhalten und es wird daher

$$FK = Fm$$

$$2FK = 2Fm = Fn + Fm = FN + FM.$$

§ 178. **Lemma 26.** (Fig. 21.) *Wird alles wie in den beiden vorigen Sätzen angenommen, so verhalten sich die Flächen der Sectoren $NQMF$ und $nQmF$ wie die Quadratwurzeln aus den Halbparametern der Ellipsen AB und Qb.*

Beweis. Wenn nämlich die Ordinaten NM auf dem Durchmesser QD senkrecht ständen, so würde die Fläche des Segmentes NMQ im umgekehrten Verhältniss des Sinus der Neigung QGN grösser sein. Wenn sie daher nach nm übertragen zur Axe Qb senkrecht stehen, so wird das Segment nQm unter allen Umständen in diesem Verhältniss grösser sein müssen. Da aber die Abscissen QE grösser sind, als die Abscissen QG, so ist das Segment nQm ebenfalls in diesem Verhältniss grösser, d. h. es ist

$$nQm = \frac{NQM \cdot QE}{\sin QGE \cdot QG}.$$

Nun ist durch Trigonometrie

$$\frac{QE}{QG \sin QGE} = \frac{1}{\sin QEG} = \frac{1}{\sin TQF}$$

[108] und daher das Segment

$$nQm = \frac{NQM}{\sin TQF}.$$

Nun ist aber (§ 173)

$$\sin TQF = \sqrt{\frac{af - f^2}{az - z^2}}.$$

und daher

$$nQm = NQM \sqrt{\frac{az - z^2}{af - f^2}}$$

$$nQm : NQM = \sqrt{az - z^2} : \sqrt{af - f^2}.$$

Da ferner die Dreiecke nFm und NFM gleiche Grundlinien nm und NM haben, so verhalten sich die Flächen derselben wie die aus dem Brennpunkt oder dem gemeinsamen Scheitel F

auf sie gefällten Lote und daher wie 1 zum Sinus des Winkels $NEF = TQE$. Also hat man ebenfalls:

$$nFm : NFM = \sqrt{az - z^2} : \sqrt{af - f^2}$$

und ebenso die ganzen Sectoren

$$nQmF : NQMF = \sqrt{az - z^2} : \sqrt{af - f^2}.$$

Die Halbparameter der beiden Ellipsen sind aber

$$\frac{2(af - f^2)}{a} = s$$

$$\frac{2(az - z^2)}{a} = S,$$

also

$$\text{Sectoren } nQmF : NQMF = \sqrt{\frac{aS}{2}} : \sqrt{\frac{as}{2}} = \sqrt{S} : \sqrt{s},$$

was zu beweisen war.

[**109**] § 179. **Zusatz.** Es wird daher

$$\frac{nQmF}{\sqrt{S}} = \frac{NQMF}{\sqrt{s}}.$$

§ 180. **Lemma 27.** (Fig. 22.) *Beschreibt man um die grosse Axe einer Ellipse AB einen Halbkreis, halbirt eine be-*

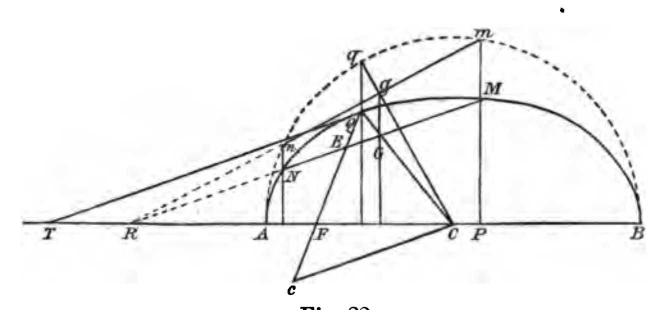


Fig. 22.

liebige Sehne NM derselben in G, zieht aus dem Centrum C die Gerade CGQ, verbindet Q mit dem Brennpunkte F durch die Gerade Qc und zieht endlich die Gerade Cc parallel zur Sehne NM oder zur Tangente TQ, so gilt folgender Satz: Wenn

durch die Punkte N, Q, M die Normalen Nn, Qq, Mm zur grossen Axe gefällt werden und man verbindet die Punkte n, m und q, C durch Gerade, so wird der Bogen nm in q halbirt und der Pfeil $qg = QE$.

Beweis: Nach der Natur der Ellipse stehen nämlich die Ordinaten Pm und PM in dem Verhältniss der grossen zur kleinen Axe und es schneiden sich daher die Sehnen mn und MN verlängert in dem Punkte R der grossen Axe. Da nun $NG = GM$, so folgt $ng = gm$. Weiter ist $CQ:QG = Cq:qg$. Da ferner NM und Cc parallel sind, so wird $CQ:QG = Qc:QE$ und daher

$$Cq:qg = Qc:QE.$$

Es ist aber (§ 173)

$$Cq = AC = Qc,$$

mithin:

$$qg = QE.$$

[110] § 181. **Zusatz.** Da Qc die grosse Halbaxe der zweiten Ellipse Qb (Fig. 21) ist und der Halbaxe AC gleich ist, so erhellt (Fig. 22), dass der Pfeil QE gleich ist dem sinus versus des Kreisbogens nq. Es sind daher nicht nur die Sehnen der Ellipsen NM und nm (Fig. 22) einander gleich, sondern auch die Sehnen der Kreisbogen, die zu ihnen gehören.

§ 182. **Anmerkung.** (Fig. 22.) Um dies noch klarer auseinanderzusetzen, stellen wir uns vor, dass die Ellipse $ANMB$ die orthographische Projection des Kreises $AnmB$ sei, der gegen dieselbe geneigt ist und dessen Ebene mit der Ebene der Ellipse sich in der Knotenlinie AB schneiden und der Cosinus des Neigungswinkels gleich $PM:Pm$ ist. Es wird dann die Sehne NM die Projection der Kreissehne nm und ebenso wird die elliptische Sehne nEm (Fig. 21) die Projection der Sehne desjenigen Kreises, dessen Durchmesser und Schnittlinie die grosse Axe Qb ist und dessen Neigungswinkel durch seinen Cosinus $= c\gamma : Qc$ bestimmt ist. Also sind nach dem vorigen Zusatz nicht nur die Kreissehnen gleich, sondern auch die elliptischen, die die Projectionen von jenen sind.

§ 183. **Lehrsatz 15ª.** (Fig. 21.) *Wird alles wie im Lemma 24 (§ 173) angenommen, so können beide Ellipsen Qmb und AQB Cometenbahnen sein und beide werden in derselben Zeit durchlaufen.*

[111] Beweis: Es ist nämlich beiden Ellipsen der Brennpunkt F gemeinsam, in welchem nach Gesetz 3 (§ 68) das Centrum der Sonne sein wird, welches nothwendig mit dem Brennpunkte des Kegelschnittes zusammenfallen muss, in dem sich ein Comet bewegt. Weil ferner nach Lemma 24 die beiden Axen AB und Qb gleich sind, so muss nach § 71 auch die Umlaufszeit dieselbe sein.

§ 184. **Lehrsatz 16.** (Fig. 21.) *Unter denselben Voraussetzungen wie zuvor werden die Bogen nQm und NQM in derselben Zeit durchlaufen.*

Beweis: Nach Gesetz 4 (§ 69) verhalten sich die Zeiten wie die Flächen, welche der Radiusvector überstreicht, dividirt durch die Quadratwurzeln aus den Halbparametern; also verhält sich die Zeit, in welcher der Bogen NM durchlaufen wird zur Zeit, in welcher nQm durchlaufen wird wie

$$\frac{NQMF}{\sqrt{s}} : \frac{nQmF}{\sqrt{S}}.$$

Da nun nach § 179

$$\frac{NQMF}{\sqrt{s}} = \frac{nQmF}{\sqrt{S}},$$

so folgt nothwendig die Gleichheit der Zeiten.

§ 185. **Aufgabe 37.** (Fig. 21.) *Wenn ein Comet in einer elliptischen Bahn einen beliebigen Bogen NQM durchläuft, so soll man die unendlich vielen anderen Ellipsen angeben, in welchen er in der nämlichen Zeit Bogen durchlaufen würde, welche dieselbe Sehne NM haben und bei welchen die Summe der äusseren Radienvectoren gleich der Summe der äusseren Radienvectoren $FN + FM$ ist.*

[112] Erste Lösung. Man halbire die Sehne NM in G und ziehe vom Centrum C die Gerade CGQ; dann wird jede Ellipse, die mit der gegebenen isochron ist oder mit ihr gleiche Umlaufszeit hat, der Aufgabe genügen, wenn man sie so legt, dass sie durch den Punkt Q geht und ihr Brennpunkt mit dem Brennpunkte der gegebenen Ellipse zusammenfällt.

Zweite Lösung. (Fig. 22.) Man betrachte die Ellipse AQB als die orthographische Projection des Kreises AqB, dann wird die Sehne NM die Projection der Sehne nm sein. Dann verschiebe man den Bogen nm nach Belieben auf dem Kreise AqB und suche durch Aenderung der Neigung die

projicirte Sehne, welche der gegebenen NM gleich ist. Dadurch erhält man zwei Punkte der zu construirenden Ellipse und überdies die beiden Scheitel A und B. Die construirte Ellipse hat man dann so zu legen, dass ihr Brennpunkt mit dem Brennpunkte F zusammenfällt.

§ 186. **Anmerkung.** Nehmen wir der Kürze halber an, nm sei die verschobene Sehne selbst, dann fällen wir nN und mM zur Axe normal und verlängern die Sehne nm bis R, wo sie die Axe schneidet. Nun suche man zu nm, Rm und der gegebenen Sehne die vierte Proportionale ($nm : Rm = NM : x$). Mit dieser schneide man aus R in M ein, dann werden N und M jene zwei gesuchten Punkte der Ellipse $ANMB$ sein und der Bogen NM wird der Aufgabe genügen.

§ 187. **Definition 4.** *Unter dem »elliptischen Fall des Cometen gegen die Sonne« verstehen wir dessen Bewegung in einer Ellipse, deren kleine Axe oder Halbparameter gleich Null* [**113**] *ist oder deren Scheitel mit dem Brennpunkte im Centrum der Sonne zusammenfällt.*

§ 188. **Zusatz 1.** Weil die grosse Axe der Ellipse endlich ist, so ist vom elliptischen Fall der Anfang gegeben und der Comet, der auf diese Weise in die Sonne fällt, beginnt seine Bewegung vom Zustande der Ruhe aus und durchmisst dann die ganze grosse Axe.

§ 189. **Zusatz 2.** Weil ferner die Umlaufszeit eines in einer Ellipse wandelnden Cometen nur von der Länge seiner grossen Axe abhängt (§ 71), so erhellt, dass wenn diese gegeben ist, damit zugleich die Zeit bekannt ist, in welcher der Comet vom Zustande der Ruhe ausgehend in die Sonne fällt.

§ 190. **Aufgabe 38.** *Gegeben ist die Entfernung von der Sonne in dem Moment, wo der Comet sich in Ruhe befindet; man soll die Zeit finden, in welcher er zur Sonne gelangt.*

Lösung: Es sei D jene Distanz; dann wird dies die Länge der grossen Axe einer Ellipse sein, deren Umlaufszeit doppelt so gross ist als die gesuchte Zeit. Da nun die Umlaufszeit nach § 71 gleich

$$\frac{\pi}{m}\left(\tfrac{1}{2}D\right)^{\frac{3}{2}}$$

ist, so wird die Zeit des elliptischen Falles in die Sonne gleich

$$t = \frac{\pi}{m}\,\frac{D^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{2}}\,.$$

[114] § 191. **Zusatz.** Da die Zeit des parabolischen Falles nach § 103 gleich

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{D^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2}}$$

ist, so verhält sich die parabolische zur elliptischen Zeit wie 4 zu 3π oder nahe wie 14 zu 33 oder 73 zu 172.

§ 192. **Anmerkung.** Wenn wir für D die mittleren Distanzen der Planeten annehmen, so wird die Zeit ihres elliptischen Falles in die Sonne:

♄	1902.60	Tage
♃	764.38	»
♂	121.42	»
♁	64.57	»
♀	39.70	»
☿	15.55	»

§ 193. **Aufgabe 39.** (Fig. 12.) *Man ermittle die Geschwindigkeit eines in einer Ellipse sich bewegenden Cometen.*

Lösung: Es sei AM ein elliptischer Bogen, A der Scheitel, $AF = f$ seine Distanz vom Brennpunkte oder vom Centrum der Sonne; die grosse Axe sei a, die Strecke $FM = z$, der Bogen MN unendlich klein, MP ein um die Sonne concentrischer Kreisbogen. Die Zeit, in welcher MN durchlaufen wird, sei T und die, in welcher MP durchlaufen [115] wird, sei t. Da der Halbparameter der Ellipse

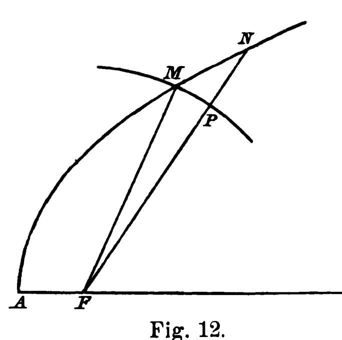


Fig. 12.

$$\frac{2(af - f^2)}{a}$$

ist, so wird nach Gesetz 4 (§ 69)

$$T = \frac{MFN\sqrt{a}}{m\sqrt{2af - 2f^2}}$$

$$t = \frac{MFP}{m\sqrt{z}}.$$

Nennen wir die Geschwindigkeiten in $MN = C$ und in $MP = c$, so wird

$$C = \frac{MN}{T}$$

$$c = \frac{MP}{t}$$

und daher

$$C : c = \frac{m \cdot MN \cdot \sqrt{2(af - f^2)}}{MFN \cdot \sqrt{a}} : \frac{MP \cdot m\sqrt{z}}{MFP}$$

oder

$$C : c = MN\sqrt{2(af - f^2)} : MP\sqrt{za}.$$

Es ist aber

$$\frac{MP}{MN} = \sin MNP = \frac{\sqrt{af - f^2}}{\sqrt{az - z^2}} \quad (\S\ 173),$$

also nach durchgeführter Substitution:

$$C : c = \sqrt{2(az - z^2)} : \sqrt{za}.$$

Nun ist nach § 75 die Geschwindigkeit auf dem Kreise:

$$c = \frac{2m}{\sqrt{z}},$$

also wird

$$C = \frac{2m\sqrt{2(az - z^2)}}{z\sqrt{a}}.$$

Dies ist die Strecke, welche in der Richtung der Tangente in einem mittleren Sonnentage durchlaufen wird.

§ 194. **Zusatz.** Da die eben ermittelte Formel nur die grosse Axe und die Distanz FM enthält, so ist klar, dass die [116] Geschwindigkeit von der Lage des Brennpunktes in der grossen Axe unabhängig ist.

§ 195. **Lehrsatz 16ᵃ.** *Wenn die Umlaufszeiten zweier oder mehrerer in Ellipsen wandelnder Cometen gleich sind, so ist die Geschwindigkeit derselben in derselben Distanz von der Sonne gleich.*

Beweis: Wenn nämlich die Umlaufszeiten gleich sind, so sind auch die grossen Axen gleich (§ 71); da nun die Geschwindigkeit in der elliptischen Bewegung allgemein gleich

$$C = \frac{2\sqrt{2}\, m \sqrt{az - z^2}}{z\sqrt{a}}$$

ist, und die grossen Axen und die Distanzen bei allen dieselben sind, so sind es auch die Geschwindigkeiten.

§ 196. **Lehrsatz 17.** (Fig. 23.) *Wenn ein in einer Ellipse wandelnder Comet den beliebigen Bogen NM durchläuft und man halbirt die Sehne NM in G, zieht aus dem Centrum C den Halbmesser CGQ und aus dem Brennpunkte F eine der grossen Axe AB gleiche Gerade Fb; macht ferner auf dieser letzteren $Fg = \frac{1}{2}(FN + FM)$ und $gn = gm = GN$, so wird, wenn der Comet im Punkte b von der Ruhe ausgehend gegen die Sonne fällt, die Zeit, in welcher er den Abschnitt mn durchmisst, gleich der Zeit, in welcher er den Bogen NM zurücklegt.*

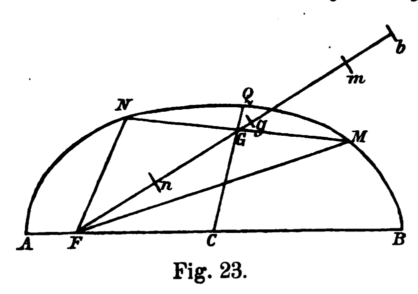


Fig. 23.

Beweis: Die Gerade Fb kann als eine Ellipse betrachtet werden, deren Scheitel mit dem Brennpunkte in F zusammen- [117] fällt; wegen $Fb = AB$ wird die Zeit, in welcher er dieselbe durchläuft, gleich der Umlaufszeit der Ellipse AQB (§ 71). Ferner ist die Summe der Radienvectoren $Fn + Fm = FN + FM$ und die durchlaufene Sehne $nm = NM$; nach Aufgabe 37 (§ 185) werden also beide Sehnen in derselben Zeit durchlaufen.

§ 197. **Zusatz.** Es kann daher die Zeit, in welcher ein beliebiger elliptischer Bogen durchlaufen wird, durch den »elliptischen Fall des Cometen in die Sonne« bestimmt werden.

§ 198. **Definition 5.** *Die Scala der elliptischen Geschwindigkeiten ist eine geradlinige Theilung, auf welcher für jede beliebige*

Distanz von der Sonne die Geschwindigkeit eines in elliptischer Bahn sich bewegenden Cometen entnommen werden kann.

§ 199. **Zusatz.** Da die elliptische Geschwindigkeit von der grossen Axe abhängt, so ist die Folge, dass die Scala dieselbe bleibt, wenn die grosse Axe festgehalten wird; für jede andere grosse Axe aber muss die Scala geändert werden.

§ 200. **Lehrsatz 18.** (Fig. 13.) *Bezeichnet F das Centrum der Sonne, in welches der Comet vom Zustand der Ruhe in A ausgehend fällt und wird zu jedem beliebigen Punkte M die Zeit hinzugeschrieben, welche der Comet entweder von A nach M oder von M nach F braucht, so stellt die auf diese Weise getheilte Gerade AF die Scala der Geschwindigkeiten dar für alle Ellipsen, deren grosse Axe gleich AF ist.*

[118] Beweis: Es wird nämlich dadurch die Zeit gegeben, in welcher die kleine Strecke Mm durchfallen wird. Theilt man aber diese Strecke durch die Zeit, so hat man die Geschwindigkeit in M. Da jede grosse Axe eine andere Scala der Geschwindigkeiten erfordert (§ 199) und da die Gerade AF eine Ellipse vorstellt, deren Brennpunkt und Scheitel F und deren grosse Axe AF ist (§ 197), so kann die Scala nur für Ellipsen dienen, deren grosse Axe $= AF$ ist.

§ 201. **Lehrsatz 19.** (Fig. 24.) *Sei A das Centrum der Sonne und der Comet falle von der Ruhe in B ausgehend nach A; man beschreibe ferner über AB als Durchmesser einen Halbkreis, nehme die beliebige Abscisse AP, die zugehörige Ordinate PM und ziehe AM, dann verhält sich die Zeit des ganzen Falles durch BA zur Zeit des Falles durch BP, wie die Fläche des Halbkreises AMB zur Fläche des Segmentes AMB.*

Fig. 24.

Erster Beweis: Die Gerade AB ist nämlich eine Ellipse ohne Breite und die Flächen, welche der Radiusvector überstreicht und welchen nach dem bekanntesten Satz der Astronomie die Zeiten gleich sind, werden daher bequemer und wohl nothwendig durch die Flächen des Halbkreises über AB ersetzt. Es ist aber der Brennpunkt in A und AM tritt an Stelle des Radiusvectors; die Zeiten werden sich daher verhalten wie die Flächen, die er überstreicht. Daher verhält sich die Zeit des ganzen Falles zur Zeit des Falles durch BP, wie die Fläche des Halbkreises zur Fläche des Sectors MAB.

[**119**] Zweiter Beweis: Es sei $AB = a$, $AP = z$, $Pp = -dz$ und die Zeit, in der Pp durchfallen wird, $d\tau$; dann ist die Geschwindigkeit in P gleich $-\frac{dz}{d\tau}$. Wir sahen aber, dass diese ist: (§ 193)

$$-\frac{dz}{d\tau} = \frac{2\sqrt{2}\, m \sqrt{az - z^2}}{z\sqrt{a}}$$

oder

$$-\frac{2\sqrt{2}\, m\, d\tau}{\sqrt{a}} = \frac{z\, dz}{\sqrt{az - z^2}}$$

oder

$$-\frac{2\sqrt{2}\, m}{\sqrt{a}}\,\tau = \int \frac{z\, dz}{\sqrt{az - z^2}}.$$

Es ist aber $\frac{az\, dz}{4\sqrt{az - z^2}}$ gleich dem Elementarsector AmM und daher

$$\tfrac{1}{2}\tau m \sqrt{2a} = MAB$$

$$\tau = \frac{2\, MAB}{m\sqrt{2a}} = \frac{2n \cdot MAB}{\sqrt{2a}}.$$

Fig. 25.

§ 202. **Anmerkung 1.** Diese Formel giebt die Zeit in mittleren Sonnentagen; dieselbe hängt, wie man sieht, von der Länge der grossen Axe AB ab. Wenn man aber allgemein die Umlaufszeit einer Ellipse in 100 gleiche Theile theilt und die grosse Axe in 10 000, so kann man eine Tafel des elliptischen Falles berechnen, (siehe Tafel II am Schluss), deren Gebrauch allgemeiner ist. Diese Tafel kann man nach Lehr- [**120**] satz 18 (§ 200) auch benutzen, um Scalen elliptischer Geschwindigkeiten zu construiren. Eine solche stellt Fig. 25 vor. Die eingeschriebenen Zahlen sind die Zeiten, in welchen der Comet im elliptischen Falle von einem beliebigen gegebenen Orte aus in die Sonne gelangt, wenn der Fall in B seinen Anfang nimmt und die ganze Zeit in 50 gleiche Theile getheilt wird.

§ 203. **Anmerkung 2.** (Fig. 23 Seite 96.) Wenn die Gerade $Fb = AB$ (§ 196) auf diese Weise getheilt wird, dann wird

die Differenz der den Punkten n und m beigeschriebenen Zeiten die Zeit sein, in welcher die Strecke nm und daher auch der Bogen NM durchlaufen wird. Der Gebrauch der elliptischen Scala ist also derselbe wie der der parabolischen, den wir oben auseinandersetzten. Sobald die grosse Axe gegeben ist, ist auch die Scala der Geschwindigkeiten gegeben und es genügt dann die Länge der Sehne des durchlaufenen Bogens und die Summe der äusseren Radienvectoren $FN + FM$, um die Zeit zu bestimmen.

§ 204. **Aufgabe 40.** (Fig. 21, Seite 86.) *Gegeben ist die Länge der grossen Axe, die Lage des Brennpunktes und die Lage der beiden Punkte N und M; man soll die Ellipse construiren.*

Lösung: Man ziehe die beiden Radienvectoren FM und FN von der grossen Axe ab, dann sind die Differenzen oder Reste nach der Natur der Ellipse gleich den Abständen der Punkte M und N vom anderen Brennpunkte f; da die Punkte aber ihrer Lage nach gegeben sind, so kann auch der Brennpunkt f ohne Schwierigkeit gefunden werden. Dann wird die [**121**] Gerade Ff in C halbirt und die halbe Länge der grossen Axe von C aus nach A und B abgetragen; dann ist AB Lage und Länge der grossen Axe. Die übrige Construction kann dann sehr leicht erledigt werden.

§ 205. **Anmerkung.** Es ist klar, dass die Bestimmung von f zweideutig ist, dass daher anderweitig festgesetzt werden muss, welche von beiden zu wählen ist.

§ 206. **Lehrsatz 20.** (Fig. 15.) *Wenn ein Comet, dessen Umlaufszeit bekannt ist, von der Erde aus in beiden Knoten beobachtet wird, so ist hierdurch die Lage und Länge der Knotenlinie und die Lage der grossen Axe und überhaupt die ganze Bahn bestimmt, nur die Neigung der Bahnebene bleibt unbestimmt.*

Beweis: Sei NAN' ein Theil der Ellipse, F ihr Brennpunkt oder das Centrum der Sonne, EE' die Bahn der Erde und zugleich ihre Oerter zur Zeit der beiden Beobachtungen. Die Lagen der Geraden EN und $E'N'$ sind durch die geocentrischen Längen gegeben und NFN' ist die Knotenlinie. Da nun die Umlaufszeit und damit die grosse Axe gegeben ist, so kann die Scala der Geschwindigkeiten construirt werden. Auf dieser zähle man von der Sonne aus die Zeit ab, die zwischen der ersten und zweiten Beobachtung liegt und nehme die entsprechende Distanz, so wird dies die Länge NN' der

Knotenlinie sein. Da diese nothwendig durch F geht und zwischen die Geraden NE und $N'E'$ fallen muss, so kann sie nun gezogen werden. Es sind also jetzt die beiden Punkte [**122**] N und N' und der Brennpunkt F gegeben, so dass die Construction der Bahn nach Aufgabe 40 (§ 204) ausgeführt werden kann. Da die Punkte N und N' in der Ebene der Ekliptik liegen, so kann die Neigung der Bahn aus diesen Angaben allein nicht gefunden werden.

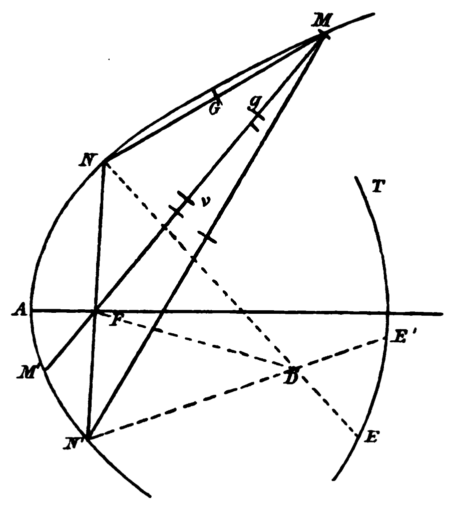


Fig. 15.

§ 207. **Anmerkung.** Es ist noch zu bemerken, dass die Lösung achtfach ist. Es kann nämlich zunächst die Strecke NN' auf vierfache Weise zwischen die Geraden NE und $N'E'$ gelegt werden, so dass sie durch F hindurchgeht. Sodann lässt jede Lage der Geraden NN' noch eine zweifache Lage der Bahn zu (§ 205), woraus also eine achtfache Lösung resultirt. Es ist jedoch nicht schwer, sie auf eine zweifache zurückzuführen. Wenn nämlich auch die Strecke NN' auf vierfache Weise gelegt werden kann, so geht sie doch nur in zwei Fällen selbst durch F, wie es sein muss, weil das Centrum der Sonne nothwendig zwischen den beiden Knoten N und N' liegt. In den beiden übrigen Fällen fällt F ausserhalb der Knoten und diese sind daher auszuschliessen. Sodann macht

die doppelte Lage der Bahn (§ 205) hier keinerlei Schwierigkeit, weil ja mit Zuhilfenahme einer dritten Beobachtung die richtige Lage der Bahn zugleich mit dem Neigungswinkel bestimmt wird.

§ 208. **Lehrsatz 21.** *Wenn die Umlaufszeit eines Cometen bekannt ist und ausserdem drei geocentrische Oerter mit den Beobachtungszeiten, so kann dadurch die Grösse und Lage der Bahn bestimmt werden.*

[**123**] Beweis: Durch die Umlaufszeit ist nämlich die grosse Axe und damit die Scala der Geschwindigkeiten gegeben (§ 71, 200 ff.). Da der Gebrauch derselben genau derselbe ist, wie der der parabolischen Scala, so kann die Construction der Bahn ebenso absolvirt werden, wie bei der Parabel, die wir in der zweiten Lösung der Aufgabe 31 (§ 155) gegeben haben. Es wird nämlich zuerst der wahre Ort zweier Cometenpositionen bestimmt und dann mit Hülfe der dritten Beobachtung die Bahn nach Aufgabe 40 (§ 204) construirt.

§ 209. **Anmerkung.** Ich übersehe nicht, dass die Umlaufszeit, welche in diesem Satze als gegeben angenommen wurde, eigentlich fehlen könnte, da doch drei geocentrische Cometenörter genügen müssen. Damit es nun nicht scheine, als ob ich ohne Grund die Zahl der Daten vermehrt hätte, will ich folgendes bemerken. Zunächst steht fest, dass es eine allgemeine Eigenschaft der Cometenbahnen ist, dass der Bogen, welcher während der Sichtbarkeitsdauer durchlaufen wird, nur ein kleiner Theil der ganzen Ellipse ist. Daher kann man von den sechs Bahnelementen (§ 141, 142) die grosse Axe aus sich so nahe liegenden Oertern nicht mit Sicherheit ableiten, da auch der kleinste kaum vermeidliche Beobachtungsfehler einen sehr merklichen Unterschied erzeugen würde. Man muss hier auch der *Aberration des Lichtes* gedenken, welche die Beobachtungen mehr oder weniger unsicher macht und deren Effect man nicht berücksichtigen kann, wenn die Cometenbahn [**124**] nicht schon nahe bekannt ist. Wenn aber die Bahn schon nahe bekannt ist, so trifft es sich zuweilen, dass aus den übrigen Bahnelementen erkannt wird, dass der Comet bereits in früheren Zeiten beobachtet worden ist, und daraus kann dann die Umlaufszeit geschlossen werden, zumal wenn er schon mehrere Male beobachtet worden ist. Ist aber die Umlaufszeit gegeben, so wird dadurch die Bahnbestimmung in allen Fällen sehr erleichtert, weil man nun die Scala der

Geschwindigkeiten gebrauchen oder sich eine Tafel des elliptischen Falles berechnen kann, wenn man die Sache genauer durch Rechnung erledigen will. Ist die Umlaufszeit gefunden, so hat man noch dasselbe zu beachten, was wir schon bei der Parabel angemerkt haben (§ 170, 171).

§ 210. **Aufgabe 41.** (Fig. 23.) *Es sei die grosse Axe AB, die Summe der Radienvectoren $FN + FM$ und die Sehne MN gegeben; man soll die Zeit finden, in welcher der Bogen NM durchlaufen wird.*

Lösung: Ist alles wie in Lehrsatz 17 (§ 196), so wird der Comet, von b nach F fallend den Abschnitt mn in derselben Zeit zurücklegen, in welcher der Bogen NQM durchlaufen wird, und es ist:

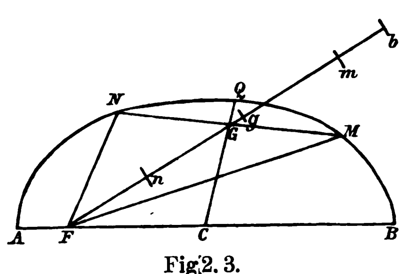


Fig. 23.

$$Fm = \frac{FN + FM + NM}{2}$$

$$Fn = \frac{FN + FM - NM}{2}.$$

[125] Wird gesetzt:

$$Fb = AB = a$$

$$Fm = z$$

$$Fn = \zeta$$

und sind t und τ die Zeiten, in welchen Fm und Fn durchfallen werden, so dass $t - \tau = T$ die gesuchte Zeit ist, so hat man (§ 201):

$$\frac{2\sqrt{2m}\,t}{\sqrt{a}} = \int \frac{z\,dz}{\sqrt{az - z^2}}$$

$$\frac{2\sqrt{2m}\,\tau}{\sqrt{a}} = \int \frac{\zeta\,d\zeta}{\sqrt{a\zeta - \zeta^2}}.$$

Entwickelt man in Reihen und integrirt, so kommt:

$$2\sqrt{2}\,mt = \tfrac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{5}\frac{z^{\frac{5}{2}}}{a} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\tfrac{2}{7}\frac{z^{\frac{7}{2}}}{a^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\tfrac{2}{9}\frac{z^{\frac{9}{2}}}{a^3} + \cdots$$

$$2\sqrt{2}\,m\tau = \tfrac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{5}\frac{\zeta^{\frac{5}{2}}}{a} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\tfrac{2}{7}\frac{\zeta^{\frac{7}{2}}}{a^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\tfrac{2}{9}\frac{\zeta^{\frac{9}{2}}}{a^3} + \cdots$$

und daher

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}}\left(z^{\frac{3}{2}} - \zeta^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{n}{10a\sqrt{2}}\left(z^{\frac{5}{2}} - \zeta^{\frac{5}{2}}\right) + \frac{3n}{56a^2\sqrt{2}}\left(z^{\frac{7}{2}} - \zeta^{\frac{7}{2}}\right)$$
$$+ \frac{5n}{144a^3\sqrt{2}}\left(z^{\frac{9}{2}} - \zeta^{\frac{9}{2}}\right) + \cdots$$

[126] § 211. **Zusatz 1.** Wenn die grosse Axe unendlich gross ist, die Ellipse also in eine Parabel übergeht, dann erhält man kurz

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}}\left(z^{\frac{3}{2}} - \zeta^{\frac{3}{2}}\right)$$

wie schon früher bei der dritten Lösung der Aufgabe 15 (§ 83).

§ 212. **Zusatz 2.** Es ist jetzt auch ersichtlich, was man der Zeit, die nach der Hypothese der Parabel berechnet ist, hinzufügen muss, um die Zeit zu erhalten, in welcher der elliptische Bogen durchlaufen wird. Der erste Term der erhaltenen Reihe ist nämlich von der Axe der Ellipse unabhängig und dient, allein gebraucht, für die Parabel.

§ 213. **Zusatz 3.** Ist FB die Axe der Hyperbel, so wird die Zeit des hyperbolischen Falles der Cometen von m nach F nach § 210

$$t = \frac{n}{2\sqrt{2}}\left(\tfrac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{5}\frac{z^{\frac{5}{2}}}{a} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\tfrac{2}{7}\frac{z^{\frac{7}{2}}}{a^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\tfrac{2}{9}\frac{z^{\frac{9}{2}}}{a^3} + \cdots\right).$$

Hieraus kann leicht die Scala der hyperbolischen Geschwindigkeiten construirt werden, ähnlich wie bei der Ellipse und Parabel.

[127] § 214. **Lehrsatz 22.** (Fig. 26.) *Wird um die grosse Axe der Ellipse AB der Halbkreis AqB geschlagen, die Sehne NM parallel zur Axe AB gezogen, und die Ordinaten PNn, RMm errichtet, so werden, wenn für die Ellipse die Sonne im Brennpunkte F, für den Kreis aber im Centrum C sich befindet, die Bogen NQM und nqm in derselben Zeit durchlaufen.*

Beweis: Errichtet man im Centrum C die Normale CQq, so halbirt diese die beiden Sehnen NM und nm; zieht man daher FQ, so wird $QE = qg$ (§ 180) und die nach den Angaben von Lemma 24 (§ 173) durch Q gelegte Ellipse geht in diesem Falle wegen $FQ = AC$ in einen Kreis $\nu Q\mu$ über, der gleich ist dem Kreise AqB. Zieht man daher $\nu E\mu$ normal zu FQ, so wird der Bogen $\nu Q\mu$ in derselben Zeit durchlaufen wie der Bogen NQM (§ 183). Wegen $FQ = Cq$ und $QE = qg$ ist aber der Bogen nqm gleich $\nu Q\mu$ und die Sehne nm gleich $\nu\mu$. Wenn man daher das Centrum der Sonne für den Kreis AqB nach C versetzt, so wird der Bogen nqm in derselben Zeit durchlaufen, wie der elliptische Bogen NQM.

§ 215. **Zusatz 1.** Wenn also die Zeit gegeben ist, in welcher der Comet von A nach N gelangt, so ist es nicht schwierig die Zeit zu finden, in welcher er von A nach M gelangt und umgekehrt. Es ist nämlich nur die Zeit zu addiren oder zu subtrahiren, in welcher der Kreisbogen nm durchlaufen wird. Deren Berechnung aber ist sehr leicht, denn dieselbe verhält sich zur Umlaufszeit des Cometen, wie der Bogen nqm zur Peripherie des ganzen Kreises AqB.

[128] § 216. **Zusatz 2.** (Fig. 26.) Da unser Theorem von der Lage des Brennpunktes F unabhängig ist, so durchläuft der Comet, wenn das Centrum der Sonne nach A versetzt wird, so dass $AF = 0$ ist, von B nach A und wenn er mit elliptischer Geschwindigkeit sich bewegt, die Strecke RP in derselben Zeit, in welcher der Kreisbogen nqm durchlaufen wird. Und so kann wieder, wenn die Zeit gegeben ist, in welcher er von B nach R fällt, sehr leicht die Zeit ermittelt werden, in welcher er von B nach P fällt, oder auch, wenn die Zeit gegeben ist, in welcher er von P nach A gelangt, jene, die er von R nach A gebraucht.

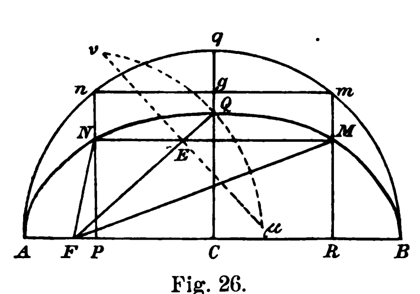


Fig. 26.

§ 217. **Lehrsatz 23.** (Fig. 21.) *Wenn die grosse Axe gegeben ist, so kann die Bewegung eines Cometen über einen*

beliebigen Bogen NM ersetzt werden durch die Bewegung in einer andern Ellipse nQm von gleicher Umlaufszeit, und zwar so, dass er in dieser letzteren in derselben Zeit die Bogen nQ und mQ durchläuft, welche auf beiden Seiten des Scheitels Q gleich gross sind.

Beweis: Man halbire die Sehne NM in G, nehme die halbe Summe der Radienvectoren $\frac{FN + FM}{2}$, und construire das rechtwinklige Dreieck FEm, so dass

$$Fm = \frac{FN + FM}{2}$$

$$Em = \tfrac{1}{2} NM$$

wird. Nimmt man dann die Differenz zwischen Fm und der Axe AB und schneidet mit derselben von m aus auf EF in φ ein, so ist damit der zweite Brennpunkt der gesuchten Ellipse gefunden. Wird daher φF in c halbirt und $cQ = cb = AC$ gemacht, so wird Qb die grosse Axe. Mit ihr und dem Brennpunkte F kann die Ellipse construirt werden und es ist dann mQn der gesuchte Bogen (§ 183).

Tafel I. Zur Berechnung des parabolischen Falles in die Sonne. (§ 115.)

Zeit	Dist. ☉	Zeit	Dist. ☉
0^d 0^h	0.00000	4^d 0^h	0.27722
3	02750	6	28866
6	04366	12	29987
9	05721	18	31088
0 12	0.06930	5 0	0.32169
15	08042	6	33233
18	09082	12	34279
21	10064	18	35311
1 0	0.11002	6 0	0.36327
3	11900	6	37326
6	12766	12	38318
9	13604	18	39294
1 12	0.14416	7 0	0.40258
15	15206	6	41211
18	15976	12	42153
21	16728	18	43085
2 0	0.17464	8 0	0.44006
3	18184	6	44919
6	18891	12	45822
9	19584	18	46712
2 12	0.20265	9 0	0.47601
15	20935	6	48479
18	21595	12	49348
21	22244	18	50211
3 0	0.22884	10 0	0.51065
3	23516	12	52753
6	24139	11 0	54415
9	24754	12	56052
3 12	0.25360	12 0	0.57665
15	25961	12	59256
18	26055	13 0	60826
21	27142	14 0	63906
4 0	0.27722	15 0	0.66914

Zeit	Dist. ⊙	Zeit	Dist. ⊙	Zeit	Dist. ⊙
15ᵈ	0.66914	45ᵈ	1.39188	75ᵈ	1.95659
16	69856	46	41243	76	97394
17	72737	47	43282	77	1.99122
18	75563	48	45307	78	2.00843
19	78336	49	47318	79	02555
20	0.81061	50	1.49315	80	2.04261
21	83741	51	51300	81	05960
22	86379	52	53272	82	07651
23	88977	53	55230	83	09336
24	91538	54	57176	84	11014
25	0.94063	55	1.59111	85	2.12685
26	96555	56	61034	86	14350
27	0.99015	57	62945	87	16009
28	1.01442	58	64845	88	17661
29	03846	59	66735	89	19307
30	1.06220	60	1.68614	90	2.20946
31	08567	61	70482	91	22580
32	10890	62	72340	92	24208
33	13188	63	74188	93	25829
34	15463	64	76026	94	27445
35	1.17717	65	1.77855	95	2.29056
36	19948	66	79675	96	30660
37	22159	67	81485	97	32260
38	24351	68	83287	98	33853
39	26523	69	85080	99	35441
40	1.28676	70	1.86863	100	2.37024
41	30812	71	88639		
42	32931	72	90406		
43	35032	73	92165		
44	37118	74	93916		
45	1.39188	75	1.95659		

Tafel II. Zur Berechnung des elliptischen Falles. (§ 202.)

Zeit	Dist. ⊙	Zeit	Dist. ⊙	Zeit	Dist. ⊙
0	0	17	7008	34	9355
1	1270	18	7209	35	9434
2	1984	19	7399	36	9508
3	2562	20	7580	37	9577
4	3062	21	7753	38	9642
5	3513	22	7918	39	9699
6	3921	23	8075	40	9751
7	4298	24	8226	41	9799
8	4647	25	8368	42	9842
9	4973	26	8503	43	9880
10	5279	27	8631	44	9912
11	5567	28	8753	45	9939
12	5840	29	8869	46	9961
13	6100	30	8978	47	9978
14	6343	31	9081	48	9990
15	6575	32	9178	49	9998
16	6797	33	9269	50	10000
17	7008	34	9355		

II.

Bemerkungen über die scheinbare Bahn der Cometen.

(Observations sur l'orbite apparente des Comètes, Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin Année 1771.)

[352] § 1. Die Astronomen haben bis jetzt mehr Gewicht darauf gelegt, die wahren Bahnen der Cometen zu ermitteln, als die Erscheinungen zu bestimmen, welche man daraus für ihre scheinbaren Bahnen ableiten kann. Man kann zwar, wenn die wahre Bahn bekannt ist, daraus die scheinbare Bewegung sehr leicht ableiten, ja sogar voraussagen, aber man macht dies immer nur für bestimmte Fälle und eine allgemeine Theorie ist daher nicht ausgebildet worden. Man begnügt sich zu wissen, dass drei Beobachtungen zur Berechnung der wahren Bahn nöthig sind, und man hat dafür mehrere Methoden vorgeschlagen, welche alle schliesslich auf Versuche und Annäherungen hinauslaufen. Das ist eine lange Arbeit und daher verdient Alles Aufmerksamkeit, was sie abkürzen kann. In dieser Absicht möchte ich eine allgemeine Theorie der scheinbaren Bahnen vorschlagen und um nicht blos beim Vorschlag zu bleiben, gebe ich hier eine Probe, aus der man wohl ersehen wird, dass es sich lohnt über diese Sache nachzudenken.

§ 2. Wenn die Erde und der Comet sich in geraden Linien mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegen würden, so wäre die scheinbare Bahn des Cometen eine sehr einfache und man brauchte keine Theorie; denn er würde einen grössten Kreis der Sphäre beschreiben. Zwei Beobachtungen würden genügen, um die Lage dieses grössten Kreises zu bestimmen und eine dritte wäre nöthig, um die Ungleichförmigkeit der scheinbaren Geschwindigkeit zu ermitteln und damit die ganze

scheinbare Bewegung des Cometen. Aber so liegt die Sache in Wirklichkeit nicht. Sehr selten liegen mehr als drei Punkte [**353**] der scheinbaren Bahn genau in einem grössten Kreise; also können weder die Erde noch der Comet sich in gerader Linie und mit gleichmässiger Geschwindigkeit bewegen.

§ 3. Wenn ein Comet sich genau in der Ebene der Ekliptik bewegen würde, so fände seine scheinbare Bewegung ebenfalls in der Ekliptik, also in einem grössten Kreise statt. Aber dieser Fall tritt nicht ein; wenigstens sind bis jetzt alle Cometen ober- oder unterhalb der Ekliptik gesehen worden oder sie haben dieselbe nur in einem Punkte geschnitten. Man weiss sogar, dass die meisten Cometenbahnen sehr starke Neigung haben. Wir können also auch von dem Falle absehen, wo der Comet sich in der Ebene der Erdbahn bewegt.

§ 4. Wenn wir nun auch die scheinbare Bewegung der Cometen in grössten Kreisen nicht zulassen können, so werden uns diese doch von Nutzen sein, indem sie uns als Vergleichsmittel dienen. Betrachten wir die scheinbare Bahn eines Cometen, nehmen darauf zwei Punkte und legen durch sie einen grössten Kreis. Ich behaupte, *wenn die zwischenliegenden Punkte der scheinbaren Bahn auf derselben Seite liegen, wie die zugehörigen Oerter der Sonne, dann ist der Comet weiter von der Sonne entfernt als die Erde und im entgegengesetzten Falle ist er näher.*

§ 5. Da ich hier vorläufig dieses Theorem nur anführe, um den Nutzen der scheinbaren Bahn erkennen zu lassen, so habe ich die näheren Bestimmungen nicht ausgesprochen. Denn es ist nicht gleichgültig, wie die Punkte A, B, C genommen werden; im Gegentheil, es ist angemessen, eine Wahl zu treffen. Aber all' das wird sich besser durch die Analyse zeigen, die mich auf dieses Theorem geführt hat und die ich jetzt auseinandersetzen will, zuerst im Allgemeinen und dann im Besonderen.

§ 6. (Fig. 27.) Sei S das Centrum der Sonne, MN ein Theil der Cometenbahn, Q ein zwischenliegender Punkt, der ungefähr in der Mitte liegt. Zieht man die Sehne MN und die Radienvectoren SM, SQ, SN, so behaupte ich e r s t e n s, dass die Zeiten, die der Comet braucht, um die Bogen MQ und QN zu durchlaufen, sehr nahe im Verhältniss der Stücke Mq und qN der Sehne MN stehen. Denn die Zeiten verhalten sich wie die Flächen der Sectoren MSQ und SQN und daher

[**354**] nahe wie die Dreiecke SMQ und SQN. Da nun diese Dreiecke die Grundlinie SQ gemeinsam haben, und ihre Höhen sich wie Mq zu qN verhalten, so folgt, dass ihre Flächen sich wie die Strecken Mq und qN verhalten, und folglich verhalten sich die Zeiten, die der Comet braucht, um die Bogen MQ und QN zu durchlaufen, ebenfalls sehr nahe wie diese Strecken Mq und qN. Ich bemerke noch, dass man beweisen kann, dass es immer einen Punkt Q giebt, für den dieser Satz streng richtig ist. Aber im Allgemeinen genügt es, den Winkel MSN hinlänglich klein zu nehmen, um den Unterschied unmerklich werden zu lassen.

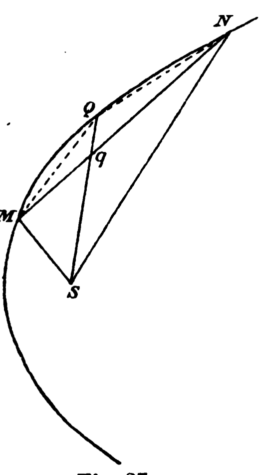


Fig. 27.

§ 7. Zweitens setzen wir voraus, dass für jede Cometenbahn die Zeit, um den Bogen MN zu durchlaufen dieselbe sei und dass sie so klein sei, dass der Winkel MSN 15 bis 20 Grad nicht überschreitet. Wenn dann der Punkt Q ungefähr in der Mitte des Bogens MN liegt, so dass der Pfeil Qq wenig oder gar nicht sich von seinem Maximum unterscheidet, so behaupte ich, dass Qq sehr nahe umgekehrt proportional dem Quadrat von SQ sein wird. Denn da die Krümmung des Bogens MQ eine Wirkung der Gravitation ist, kann man den Pfeil Qq als Wirkung des Falles des Cometen gegen die Sonne betrachten. Es wird also Qq, wenigstens genähert, proportional dem Quadrat der Zeit und umgekehrt proportional dem Quadrat der Distanz SQ sein. Nun ist die Zeit als constant oder gleich für alle Fälle vorausgesetzt; also ist Qq einfach und sehr nahe umgekehrt proportional dem Quadrat von SQ. In Bezug hierauf bemerke ich noch, dass es Punkte Q giebt, wo das Theorem streng gilt. Aber da man diese Punkte nicht immer auswählen kann, halte ich an dem »nahezu« fest, das um so mehr der Wahrheit nahe kommen wird, je weniger spitz der Winkel MqS und je kleiner der Winkel MSN ist.

§ 8. (Fig. 28.) Sei jetzt S das Centrum der Sonne, AC die Bahn der Erde, MN die Bahn des Cometen, so zwar dass

der Comet sich in den Punkten M, Q, N befindet, wenn die Erde in A, B, C ist. Wir setzen die Zeitintervalle noch als nahezu gleich voraus. Ziehen wir dann die Sehnen AC und MN und

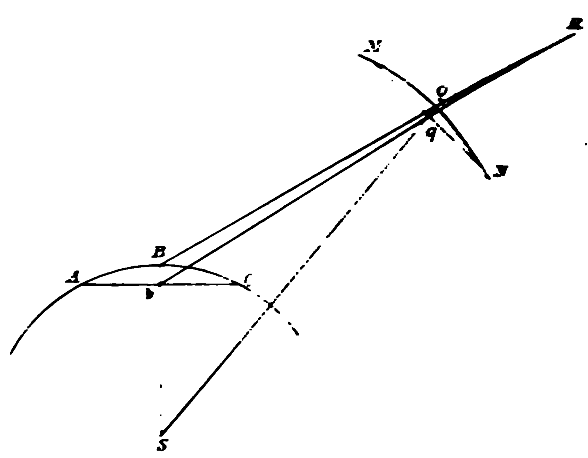


Fig. 28.

[355] die Radienvectoren SB und SQ, dann wird nach dem zweiten Satz (§ 7) sehr nahe sein:

$$Bb : \frac{1}{SB^2} = Qq : \frac{1}{SQ^2}$$

und dies giebt:

$$Bb : Qq = SQ^2 : SB^2 .$$

§ 9. Nach dem ersten Satze (§ 6) hat man ebenso sehr nahe

$$Ab : bC = Mq : qN ,$$

da diese Theile der Sehnen sich nahezu wie die Zwischenzeiten verhalten.

§ 10. Und daraus folgt nun, dass wir voraussetzen können, dass die Erde, statt den Bogen ABC zu durchlaufen, die Sehne AbC durchläuft und dass der Comet, statt den Bogen MQN zu durchlaufen, die Sehne MqN durchläuft, beide in gleichförmiger Geschwindigkeit, da die Zeitintervalle, nahe wenigstens, im Verhältniss der Strecken $Ab : bC$ und $Mq : qN$ stehen.

§ 11. In diesem Falle aber wird die scheinbare Bahn des Cometen ein grösster Kreis der Sphäre; und dieser grösste Kreis kann gezeichnet werden mit Hülfe der in A und C angestellten Beobachtungen. Diese beiden Punkte sind dem Bogen ABC und der Sehne AbC gemeinsam. Es wird also nur die in dem Zwischenpunkte B erhaltene Beobachtung von der Voraussetzung geradliniger Bahnen abweichen. Untersuchen wir, in welcher Weise.

§ 12. Offenbar sieht die Erde in B den Cometen in Q in der Richtung der Geraden BQ, und unter der Voraussetzung geradliniger Bahnen wird die Erde in b den Cometen in q in der Richtung der Geraden bq sehen. Wenn also die Geraden BQ und bq parallel zu einander sind, so wird der scheinbare Ort des Cometen in dem einen wie in dem anderen Falle derselbe sein. Im entgegengesetzten Falle werden sie sich von einander unterscheiden. Das wollen wir nun bestimmen.

§ 13. Zunächst sieht man, dass die Punkte b und q, da sie den Geraden SB bez. SQ angehören, in der Ebene des [**356**] Dreieckes BSQ liegen, welches auch die Lage der Cometenbahn sei. Nehmen wir also den Fall, wo die Geraden BQ und bq zu einander parallel sind, so werden wir haben:

$$Bb : Qq = SB : SQ\,.$$

Da aber nach dem zweiten Theorem (§ 7) allgemein

$$Bb : Qq = SQ^2 : SB^2$$

ist, so folgt:

$$SB : SQ = SQ^2 : SB^2$$

oder

$$SQ = SB\,.$$

Also: die Geraden BQ und bq sind nur dann zu einander parallel, wenn der Comet in Q eben so weit von der Sonne entfernt ist wie die Erde. Nur in diesem Falle auch kann der grösste Kreis, der durch die scheinbaren Oerter des Cometen zur Zeit der ersten und dritten Beobachtung hindurchgelegt wird, durch den scheinbaren Ort des Cometen zur Zeit der zweiten Beobachtung hindurchgehen.

§ 14. Nehmen wir weiter an:

$$SQ > SB,$$

dann sieht man nach dem zweiten Satze (§ 7), dass mit noch grösserem Rechte

$$Bb > Qq$$

sein wird. Also nähern sich die Geraden BQ und bq um so mehr, je näher man an Qq kommt, und dies noch um so mehr, als in diesem Falle die Gerade SQ gegen die Gerade BQ geneigter ist als SB. Sie werden also einen Schnittpunkt R haben, welcher jenseits des Cometen in Q liegt. Weiter folgt, dass der Winkel SbR grösser ist, als der Winkel SBR. Und daraus ergiebt sich, dass der scheinbare Ort des Cometen gesehen von der Erde in B weniger weit von der Sonne entfernt scheint, als wenn man ihn vom Punkte b der geradlinigen Bahn in der Richtung der Geraden bq sähe. Der Winkel BRb ist das Maass der Differenz.

[**357**] § 15. Setzen wir allgemein

$$Bb = \frac{n}{SB^2}$$

$$Qq = \frac{n}{SQ^2}$$

so wird:

$$RQ : RB = \frac{n}{SQ^2} \sin SQB : \frac{n}{SB^2} \sin SBQ.$$

Da aber

$$\sin SQB : \sin SBQ = SB : SQ,$$

so folgt:

$$RQ : RB = \frac{n}{SQ^2} SB : \frac{n}{SB^2} SQ$$

d. h.

$$RQ : RB = SB^3 : SQ^3.$$

§ 16. In dem Dreiecke BRb kennt man den Winkel SBR, die Seite Bb und den Winkel BRb, welcher die Differenz ist, für die Zeit der zweiten Beobachtung, zwischen der scheinbaren Bahn und dem grössten Kreise, der durch die scheinbaren Oerter des Cometen, gesehen von A und C aus, hindurchgelegt wird. Das Dreieck BRb ist also nach Grösse, Gestalt und Lage gegeben. Da man also die Gerade BR, den Winkel SBR und die Gerade SB kennt, so ist die ganze Frage darauf zurückgeführt, auf der Geraden BR einen Punkt Q so zu finden, dass

$$QR : BR = BS^3 : QS^3$$

wird. Man sieht daraus, *dass die geocentrische Distanz des Cometen BQ bestimmt ist*, wenigstens insofern, als es unsere nur *genähert* richtigen zwei Theoreme (§ 6, 7) zulassen. Man sieht auch, dass diese Formeln allgemein sind, wie auch die Distanz sei. Es muss aber doch ein Wort gesagt werden über den Fall, wo diese Distanz kleiner ist als SB.

[358] § 17. Nehmen wir

$$SQ < SB,$$

so wird der Punkt R, der im vorigen Falle jenseits des Cometen lag, nun diesseits der Erde gegen A fallen. Denn hier ist $Qq > Bb$ und die Gerade SQ ist weniger gegen die Gerade BQ geneigt als SB. Die Geraden BQ und bq entfernen sich also bei der Annäherung an Qq von einander. Daraus folgt, dass der Winkel SBQ grösser wird als der Winkel Sbq und dass folglich der scheinbare Ort des Cometen, gesehen in der Richtung BQ von der Sonne entfernter erscheinen wird, als wenn man ihn in der Richtung bq im Falle geradliniger Bahnen sähe.

§ 18. Diese Resultate können uns nun von den verschiedenen Wendepunkten Rechenschaft geben, die man in der Curve der scheinbaren Bahn wahrnimmt. Das einfachste Mittel, diese zu erkennen, ist, diese Bahn [auf eine Ebene] zu projiciren, indem man das Auge in den Mittelpunkt der Erde versetzt. Denn alle grössten Kreise der Sphäre werden dann durch gerade Linien repräsentirt und umgekehrt jede Gerade repräsentirt einen grössten Kreis an der Sphäre. Die scheinbare Bahn wird durch eine gekrümmte Linie dargestellt, welche einen Wendepunkt gerade da haben wird, wo der scheinbare Ort des Cometen einer heliocentrischen Distanz zugehört, die gleich der Entfernung der Erde von der Sonne ist. Denn in allen Punkten, welche einer grösseren heliocentrischen Distanz entsprechen, wendet die Curve ihre convexe Seite gegen den Punkt der Ekliptik, wo der entsprechende Ort der Sonne ist; und für jede heliocentrische Distanz, die kleiner ist, wenden sie ihre concave Seite gegen die Sonne. Das ist immer so, ausser wenn der Ort der Sonne in der Tangente liegt, die im entsprechenden Cometenort gezogen wird; denn dann hat die Curve auch dort einen Wendepunkt, weil die convexe Seite zur concaven wird. Zuletzt möchte ich noch bemerken, dass diese Curven sehr genau gezeichnet [359] werden müssen, weil häufig ihre Krümmung sehr klein

ist, besonders wenn der Comet weiter von der Sonne entfernt ist als die Erde und die Neigung seiner Bahn nicht gross ist.

§ 19. (Fig. 29.) Man kann sich auch der Rechnung bedienen und zwar wie folgt. Es seien ES die Ekliptik, A, B, C drei geocentrische Oerter des Cometen, projicirt auf die Ekliptik, Aa, Bb, Cc die zugehörigen Breiten, S der Ort der Sonne,

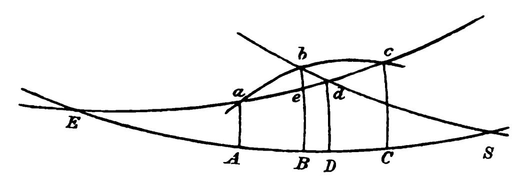


Fig. 29.

der dem in b gesehenen Ort des Cometen entspricht. Man ziehe durch ca einen grössten Kreis der Sphäre, der die Ekliptik in E schneide. Dann handelt es sich zuerst darum, diesen Punkt zu finden und sodann den Winkel aEA. Nennen wir zu dem Ende

$$Aa = \alpha \qquad AE = \varepsilon$$
$$Cc = \gamma \qquad AEa = \varphi$$
$$AC = \lambda$$

dann wird sein

$$\operatorname{cotg} \varphi = \sin \varepsilon \operatorname{cotg} \alpha = \sin(\lambda + \varepsilon) \operatorname{cotg} \gamma ,$$

also:

$$\sin(\lambda + \varepsilon) : \sin \varepsilon = \operatorname{tang} \gamma : \operatorname{tang} \alpha ,$$

woraus:

$$\operatorname{tang}(\varepsilon + \tfrac{1}{2}\lambda) : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\lambda = \sin(\gamma + \alpha) : \sin(\gamma - \alpha)$$

$$\operatorname{tang}(\varepsilon + \tfrac{1}{2}\lambda) = \frac{\sin(\gamma + \alpha) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\lambda}{\sin(\gamma - \alpha)} .$$

Hieraus findet man den Bogen $\varepsilon + \frac{1}{2}\lambda$, worauf der Bogen $\varepsilon = AE$ und folglich auch der Winkel φ durch

$$\operatorname{cotg} \varphi = \sin \varepsilon \operatorname{cotg} \alpha$$

sich leicht ergeben.

§ 20. Da die Punkte B und S, ferner die Bogen BS und Bb gegeben sind und der Winkel bBS ein Rechter ist,

so findet man den Winkel bSB und die Hypotenuse Sb durch die Formeln

$$\operatorname{cotg} bSB = \operatorname{cotg} Bb \sin BS$$
$$\cos bS = \cos Bb \cos BS\,.$$

[360] § 21. Endlich kennt man im Dreieck EdS die Seite ES und die Winkel dSE und dES und findet daher die Seite Sd durch die Formeln:

$$\operatorname{tang} \frac{ED - DS}{2} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} ES \sin(dSE - dES)}{\sin(dSE + dES)}$$
$$\tfrac{1}{2} ES - \tfrac{1}{2}(ED - DS) = DS$$
$$\operatorname{cotg} dS = \cos dSD \operatorname{cotg} DS\,.$$

§ 22. Wenn man also findet, dass der Bogen Sd grösser ist als der Bogen Sb, so wird man schliessen, dass der in b gesehene Comet näher an der Sonne ist als die Erde. Dagegen wird er entfernter sein, wenn man den Bogen Sd kleiner findet als den Bogen Sb. Wir bemerken noch, dass die Differenz beider Bogen, nämlich bd, das Maass für den Winkel BRb der Figur 28 ist. Man sieht also, wie dieser Winkel gefunden werden kann.

§ 23. Da alle Folgerungen, welche wir eben aus unseren zwei Sätzen gezogen haben, unter den »sehr nahe«, welche wir zugelassen haben, zu leiden haben könnten, so müssen wir darüber einige Bemerkungen machen. Die erste ist, dass, wenn man den Bogen bd sehr klein findet, obwohl der Bogen AC 15, 20 oder mehr Grad beträgt, man im Allgemeinen schliessen wird, dass die heliocentrische Entfernung des Cometen zur Zeit, wo er sich in b befindet, sehr nahe gleich der heliocentrischen Entfernung der Erde ist; aber man wird nicht mit Sicherheit schliessen, ob sie ein wenig grösser oder kleiner ist. Das hängt in diesem Falle von der Wahl der zwischenliegenden Beobachtung in b ab.

§ 24. Ferner ist die Differenz bd, für ein gleiches Zeitintervall, um so beträchtlicher, je näher der Comet an der Sonne ist, weil dann seine Bahn eine grössere Krümmung besitzt. Wenn der Comet näher an der Erde ist, so trägt dies auch dazu bei, den Bogen bd oder den Winkel BRb (Fig. 28) zu vergrössern, der in Hinsicht auf die beiden Punkte B und b eine Art parallaktischer Winkel ist. Es giebt jedoch in dieser Hinsicht ein *Maximum*. Denn man sieht leicht,

dass, wenn alle anderen Umstände dieselben bleiben, der Winkel bRB gleich Null wird, wenn entweder der Winkel [**361**] BSQ gleich 0 oder gleich 180° wird. Nimmt man den Winkel BRb als sehr klein an, so findet man, dass er für dieselben Distanzen SB und SQ ein Maximum wird, wenn

$$\operatorname{tang} BSQ = \frac{SQ^2 - SB^2}{2SQ \cdot SB},$$

weil sich dann die Punkte B, b, Q auf der Peripherie eines Kreises befinden müssen, dessen Mittelpunkt auf der Geraden SQ liegt, oder was auf dasselbe hinauskommt, weil die Punkte B, b, R sich auf der Peripherie eines Kreises befinden, dessen Mittelpunkt auf der Geraden liegt, welche durch R geht und parallel zu SQ ist. Aber man sieht, dass diese Umstände nicht ausgewählt werden können, weil man die Cometen nehmen muss, wie sie sich zeigen.

§ 25. Wir machen noch einige Anmerkungen, wie man die Wahl des Punktes Q treffen muss. Diese Wahl wäre sehr leicht, wenn dieser Punkt das Perihel des Cometen wäre. Aber dieser günstige Umstand kommt nicht vor und kann auch nicht im voraus erkannt werden. Sei also (Fig. 30) S das Centrum der Sonne, A das Perihel der Cometenbahn, die ich als parabolisch voraussetze. MN sei ein beliebiger Bogen. Theilen wir die Sehne MN in zwei gleiche Theile MG und GN und ziehen durch G die Parallele GQ zur Axe. Dann ist das Dreieck MGS gleich dem Dreieck NGS und das Segment MQG gleich dem Segment NQG, also:

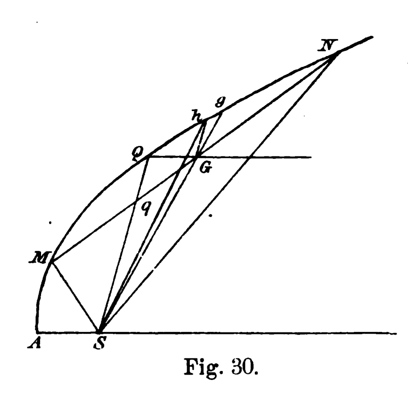


Fig. 30.

$$SMQGS = SGQNS.$$

Dann ziehe man den Radiusvector Sh so, dass das gemischtlinige Dreieck QGg gleich wird dem Sector hSg und man wird haben

$$SMhS = SNhS.$$

Ist nun der Bogen MN nicht sehr gross, so wird Qg als Gerade betrachtet werden dürfen und man bekommt:

$$Sg : Qg = Gg : gh$$

$$gh = \frac{Qg \cdot Gg}{Sg}.$$

[**362**] Daraus sieht man, dass gh eine sehr kleine Grösse ist und dass Gh sehr nahezu parallel zu SQ sein wird.

§ 26. Es sei T die Zeit, welche der Comet braucht, um den Bogen MN zu durchlaufen. Dann habe ich in der Abhandlung: Insigniores orbitae cometarum proprietates, erschienen 1761, gezeigt, dass

$$SQ = \frac{mT}{\sqrt{2GQ}} - \tfrac{1}{3}GQ = \frac{SM + SN}{2} - GQ.$$

In dieser Formel ist die mittlere Distanz der Erde von der Sonne gleich 1 gesetzt und

$$\frac{1}{m} = 116.2648$$

$$m = 0.008\,601\,059\,.$$

Es folgt also:

$$QG = qQ = \frac{m^2 T^2}{2(SQ + \frac{1}{3}QG)^2}$$

oder auch

$$qQ = \frac{m^2 T^2}{2(Sg - \frac{2}{3}QG)^2}.$$

Also ist

$$qQ < \frac{m^2 T^2}{2SQ^2}$$

und

$$qQ > \frac{m^2 T^2}{2Sg^2}.$$

Nun ist

$$qQ > gG;$$

wenn man also

$$gG = \frac{m^2 T^2}{2Sg^2}$$

macht, so wird diese Formel noch genauer sein. Ich schliesse daraus, dass man im Allgemeinen gut thun wird, drei Beobachtungen zu wählen, welche um dasselbe Zeitintervall von einander abstehen. Und dieses Intervall muss noch so klein sein, dass der Winkel MSN 20 Grade nicht übersteigt. Ich lasse noch einige Vorschläge folgen, für die dieselbe Beschränkung [**363**] gilt und deren man sich bei Bestimmung einer Cometenbahn bedienen kann.

§ 27. Nach dem, was ich oben (§ 19) sagte, sieht man (Fig. 29), dass der Bogen $aedc$ des grössten Kreises derjenige ist, den der Comet scheinbar durchlaufen würde, wenn sowohl seine Bewegung wie die der Erde geradlinig und gleichförmig

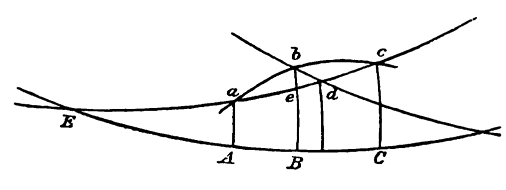


Fig. 29.

wäre, und dass für die Momente der drei Beobachtungen die scheinbaren Oerter des Cometen a, d, c sein würden. Es handelt sich also nur darum, die Länge der Bogen ad und dc mittelst der Bogen EA, EC und des Winkels AEa, die nach § 19 bestimmt werden, zu ermitteln. Sind aber die Bogen ad und dc gefunden, so kann man sie mit den Intervallen der Zeit zwischen den drei Beobachtungen vergleichen, um das Verhältniss der geocentrischen Distanzen des Cometen für die erste und dritte Beobachtung zu bekommen, und zwar folgendermassen.

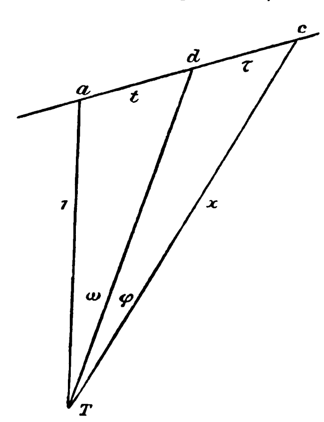


Fig. 31.

§ 28. Man mache (Fig. 31) die Winkel aTd und dTc gleich den Bogen ad und dc von Fig. 29. Nimmt man dann auf der Geraden Ta einen beliebigen Punkt a an,

so handelt es sich darum, eine Gerade ac zu ziehen, dass sie die Geraden Td und Tc so schneidet, dass die Strecken ad und dc proportional den Zeitintervallen zwischen den den Punkten a, d, c entsprechenden Beobachtungen werden. Seien diese Zeitenintervalle t und τ, ferner Winkel $aTd = \omega$, $dTc = \varphi$. Macht man $Ta = 1$ und setzt $Tc = x$, so hat man:

$$\sin\omega : ad = \sin adT : aT$$
$$\sin\varphi : dc = \sin adT : cT$$

also

$$\sin adT = \frac{aT \cdot \sin\omega}{ad} = \frac{cT \cdot \sin\varphi}{dc}$$

und folglich

$$cT = aT \frac{dc}{ad} \cdot \frac{\sin\omega}{\sin\varphi}$$

d. h.

$$x = \frac{\tau}{t} \frac{\sin\omega}{\sin\varphi}.$$

[**364**] § 29. Hat man das Verhältniss zwischen aT und cT gefunden, so findet man leicht den Winkel Tac und dann dT oder das Verhältniss dieser Geraden zu aT und cT. Dieses Verhältniss wird nur sehr wenig von dem Verhältnisse der geocentrischen Distanz des Cometen zur Zeit der zweiten Beobachtung zu den beiden anderen geocentrischen Distanzen abweichen. Man findet aber auch sehr nahe die mittlere geocentrische Distanz zur Zeit der zweiten Beobachtung mittelst der Formel des § 16. Man sieht also, dass man auf diese Weise die Versuche, die man zur Ermittelung der Bahn anzustellen hat, bedeutend abkürzen kann. Die ganze übrige Rechnung kann man auf eine einfache successive Annäherung zurückführen, indem man die Formel anwendet (Fig. 30)

$$T = \frac{(SM + SN + MN)^{\frac{3}{2}} - (SM + SN - MN)^{\frac{3}{2}}}{12m},$$

welche ich in dem oben (§ 26) citirten Werke gegeben habe und worin T die Zeit bedeutet, welche der Comet braucht, um den Bogen MN zu durchlaufen. Der Buchstabe m hat dieselbe Bedeutung wie in § 26. Diese Formel ist um so einfacher, als sie keiner anderen Daten bedarf, als der Sehne

MN und der Summe der beiden Radienvectoren *SM* und *SN*. Sie gilt für parabolische Bahnen, man kann sie aber leicht auch auf elliptische und hyperbolische Bahnen verallgemeinern. Ich beschränke mich darauf dies hier anzudeuten und den Leser auf das Werk zu verweisen, woraus ich citire, und welches ausserhalb Deutschlands nicht sehr bekannt geworden zu sein scheint.



Anmerkungen.

I. Allgemeines.

Leben und Schriften *Johann Heinrich Lambert*'s (geb. 26. August 1728 zu Mülhausen (Elsass), gest. 25. Sept. 1777 als Akademiker zu Berlin) sind bereits in den Anmerkungen zu seinem dieser Sammlung einverleibten Hauptwerke, der Photometrie (herausgegeben von *E. Anding*) ausführlich besprochen worden, so dass es genügen wird, hier nur seiner Thätigkeit auf dem Gebiete der Bahnbestimmung zu gedenken. Ausser den beiden in diesem Heft mitgetheilten Abhandlungen hat er noch folgende hierhergehörige veröffentlicht:

1) *Von Beobachtung und Berechnung der Cometen, und besonders des Cometen von 1769.* Beiträge zum Gebrauche der Mathematik, dritter Theil 1772 Seite 200—322 (Anwendung der constructiven Methode).

2) *Von den Cometen 1773 und 1774*, Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1777 (Berlin 1775) Seite 127—137 (Anwendung der Krümmungsmethode).

3) *Ueber die Bestimmung der Laufbahn der Cometen*, Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1779 (Berlin 1777) Seite 166—172 (Kritik älterer Methoden).

Diese enthalten grösstentheils Wiederholungen und Anwendungen, so dass es genügt, einige Auszüge aus ihnen in den folgenden Anmerkungen zu geben. Die hier vollständig mitgetheilten dagegen gehören wegen ihrer bedeutenden Resultate zu den klassischen Schriften der Bahnbestimmung und zeichnen sich erfreulicherweise auch durch Knappheit des Inhalts und abgerundete Form vortheilhaft vor fast allen anderen *Lambert*'schen Werken aus, die bekanntlich wegen ihrer weitläufigen Darstellung dem modernen Leser starke Zumuthungen stellen.

Die Bahnbestimmung der Cometen vor Lambert. *)

Die Geschichte des Problemes der Bahnbestimmung der Cometen im heutigen Sinne beginnt erst mit *Newton*'s Nachweis, dass auch diese Körper sich in Kegelschnitten bewegen müssen. Vorher hat *Kepler* versucht, die Bahnen der Cometen unter der Voraussetzung, dass sie sich auf gerader Linie mit gleichmässiger Geschwindigkeit bewegen, zu ermitteln. Diese *Kepler*'sche Hypothese ist noch im 18. Jahrhundert bei vielen Methoden zur Erlangung einer ersten Approximation benutzt worden (*Cassini*, *Bouguer*, *Boscovich*, *Gregori*), sie musste aber, wie zuerst *Lambert* (in der oben unter 3) citirten Abhandlung) und dann *Lagrange* (Oeuvres IV p. 464) nachgewiesen haben, zu schweren Irrthümern führen.

Newton's Lösung (Princ. Lib. III, Prop. XLI, in *Wolfers*' Uebersetzung Seite 472) ist eine constructive, graphische und war brauchbar; *Halley* hat damit eine grosse Zahl von Bahnen thatsächlich bestimmt und die Methoden des 18. Jahrhunderts lehnen sich alle mehr oder minder an sie an. *Newton* macht bereits von dem Satze Gebrauch, dass die Sehne vom mittleren Radiusvector im Verhältniss der Zeiten geschnitten werde (wie alle trigonometrischen Methoden), und was ihr zu einer vollkommenen Methode fehlt, ist eigentlich nur der *Euler*'sche Satz, wofür er sich mit einem unvollkommeneren Aushülfsmittel begnügt. *Plantamour* hat in seiner »Disquisitio de methodis traditis ad Cometarum orbitas determinandas 1839« eine analytische Darstellung der Methode gegeben.

Während bei *Newton* als diejenige Unbekannte, die durch successive Näherung bestimmt wird, die Sehne zwischen der ersten und dritten Beobachtung figurirt, kommt *Bouguer* (Mém. de l'Acad. des sc. Paris Année 1733) darauf, zwei Distanzen des Cometen von der Erde als Unbekannte einzuführen: er kann zeigen, dass man dadurch direct auf Gleichungen 1. Grades geführt wird; die Methode selbst ist illusorisch aus dem oben angedeuteten Grunde. Ein in Frankreich vor Bekanntwerden der *Laplace*'schen Methode sehr häufig angewendetes Verfahren,

---

*) Die Geschichte des Problems im 18. Jahrhundert behandeln: *Lagrange*, Sur le problème de la détermination des orbites d'après trois observations, I. Mém. Oeuvres IV p. 439, 1778 und mit besonders eingehender Kritik *Olbers*, Cometenbahnen 1797.

parabolische Bahnen zu ermitteln, ist das von *Lacaille*, bekannt unter dem Namen »Methode der falschen Voraussetzungen«, welches mehr oder minder auf ein Errathen der Elemente hinauskommt und nach *Newton's* Methode einen Rückschritt bedeutet.

Die erste rein analytische, aber sehr unvollkommene Methode hat *Euler* in dem Werke »Theoria motuum planetarum et cometarum 1744« (deutsch von *Paccassi* 1781) gegeben: er wählt als Unbekannte die Entfernung des Cometen von der Erde zur Zeit der mittleren Beobachtung, bestimmt dadurch Lage und Länge der Sehne zwischen der ersten und dritten Beobachtung und daraus dann die Elemente; mit diesen wird der Ort für die Zeit einer vierten entfernten Beobachtung berechnet, mit der Beobachtung verglichen und damit durch allmähliche Annäherung die Unbekannte selbst bestimmt. Er übersieht also vollständig das machtvolle Mittel, das ihm sein schon 1743 bekannter Satz geboten hätte, die Sehne mit der Zeit zu vergleichen, und verunstaltet seine Lösung durch Heranziehung von mehr Beobachtungen, als unbedingt nöthig sind. Die von ihm durchgeführten im Werke selbst mitgetheilten Bahnberechnungen haben ihn wohl auch von der erheblichen Rechenarbeit, die seine Methode verlangt, überzeugt und er ist auf sie niemals zurückgekommen, sondern hat in dem Werke »Recherches et calculs sur la vraie orbite de la comète 1769«, Petersburg 1770, neue Wege eingeschlagen, die aber nach *Olbers'* Urtheil auch keinen Fortschritt bedeuten (mir war die Abhandlung nicht zugänglich).

Die Methoden vor *Lambert* bestanden also entweder geradezu in einem Ausprobiren der Elemente, oder in einer graphischen Darstellung derselben oder endlich sie beruhten auf direct falschen Principien, in Folge deren Anwendung das Hauptgeschäft der Elementenermittelung wieder auf ein äusserst langwieriges Verbesserungsverfahren verlegt wurde.

Lambert's Verdienste um das Problem der Bahnbestimmung der Cometen bestehen in folgenden Punkten:

1) Er hat erkannt, dass es sich in erster Linie um eine leicht durchführbare Methode handle, eine *erste Approximation* für eine beliebig einzuführende Unbekannte zu gewinnen und dann um Methoden, diese zu verbessern. Er hat zu dem Ende eine Gleichung 6. Grades mit einer Unbekannten aufgestellt, nach deren Auflösung genäherte Elemente sich sofort

ergeben. Er selbst hat diese Gleichung freilich nicht aufgelöst, sondern hat sie durch ein graphisches Verfahren ersetzt.

2) Er hat bemerkt, dass das Verhältniss, in welchem die Sehne zwischen der ersten und dritten Beobachtung vom mittleren Radiusvector geschnitten wird, *genau gleich* ist dem Verhältniss der *Dreiecke*, welche von der Sonne und dem 1. und 2. Cometenort einerseits und der Sonne und dem 2. und 3. Cometenort andererseits gebildet werden, dass man also an Stelle dieser Dreiecke die entsprechenden parabolischen Sectoren setzt, wenn man jene Abschnitte der ganzen Sehne den Zeiten proportional nimmt.

3) Er fand den wichtigen Satz, dass die Sectoren sich genau wie die Abschnitte der Sehne $\overline{13}$ verhalten, wenn der mittlere Radiusvector durch den Schnittpunkt der Tangenten geht, die parallel zu den Sehnen $\overline{12}$ und $\overline{23}$ an die Parabel gezogen werden.

4) Er hat durch die Entdeckung und sofortige Verwendung seines Satzes, dass die Zeit, die zur Beschreibung eines Bogens gebraucht wird, durch die untergespannte Sehne und die Summe der Radienvectoren der Endpunkte ausgedrückt werden kann, das bequeme und wirkungsvolle Mittel geschaffen, die aufeinanderfolgenden Hypothesen rasch zu erledigen.

5) Durch die Projection der Bahn auf eine Ebene, welche auf der durch Sonne, Erde und Comet zur Zeit der mittleren Beobachtung bestimmten Ebene (oder auf der Linie Erde—Sonne) senkrecht steht, findet er das einfachste Mittel, sofort die Richtung der Projection des mittleren Radiusvectors auf diese Ebene angeben zu können, da dieselbe offenbar mit der Projection der bekannten Visirlinie Erde—Comet zusammenfällt. Dadurch fällt für ihn die Betrachtung des Pfeiles des durchlaufenen Bogens fort, durch welche die *Newton*'sche Methode weitläufig und unsicher wird.

6) Er giebt in seinem Satze über die Krümmung der scheinbaren Bahn einen geradezu genialen Weg, die Distanz des Cometen von der Erde zur Zeit der zweiten Beobachtung zu ermitteln. Er zeigt, dass der Abstand des mittleren beobachteten Ortes von dem grössten Kreise, der durch die beiden äusseren beobachteten Oerter hindurchgelegt wird, von der Krümmung der Cometen- und Erdbahn herrührt, von denen *letztere* bekannt, und erstere näherungsweise aus der Wirkung

der Centralkraft abgeleitet werden kann; dadurch entsteht eine Gleichung, welche als Unbekannte die Entfernung des Cometen von der Erde enthält.

Bahnbestimmung nach Lambert bis Olbers.

Lambert selbst hat die vollen Früchte seiner erfolgreichen Bemühungen nicht geerntet; ihm fehlte der Sinn für die analytische Behandlung des Problems, die doch allein zu exacten Resultaten führen kann; gerade am entscheidenden Punkte kehrt er, seiner Vorliebe für die Geometrie folgend, wieder zur Construction zurück und beraubt sich dadurch um den vollen Erfolg, den erst *Olbers* davontrug. Indem dieser, wie *Encke* sich ausdrückt, in glücklichster Weise geometrische und analytische Behandlung verknüpfte, brachte er die Methode zu einer Vollendung, die noch heute nicht übertroffen ist; aber es muss doch hervorgehoben werden, dass sich die *Olbers*'sche Methode abgesehen von einem Punkte, der zur Kürzung der Rechnung beiträgt, kaum von der *Lambert*'schen unterscheidet.

Die von *Lambert* gegebene Anregung fiel jedoch auf fruchtbaren Boden und führte das Problem schnell der Lösung entgegen. Im Jahre 1777 stellte die Berliner Akademie, wohl auf Veranlassung von *Lambert* und *Lagrange*, als Preisarbeit das Cometenproblem auf. Die eingelaufenen Arbeiten von *Condorcet*, *Hennert* und *Tempelhoff* *) fanden zwar den Beifall der Akademie, können aber noch nicht als Fortschritt bezeichnet werden, da sie nur in unwesentlichen Punkten über *Lambert* hinausgehen. Auch die Arbeit des Berliner Astronomen *Schulze* **) ist nur eine unwesentliche Umarbeitung der *Lambert*'schen Construction und enthält keine neuen Gesichtspunkte. Der Hauptgewinn des Preisausschreibens war jedenfalls, dass sich *Lagrange* selbst mit dem Problem zu beschäftigen anfing und darüber zwei Mémoires schrieb (Mém. de l'Ac. de Berlin Année 1778, Oeuvres Band IV), die hinwiederum die Arbeiten von *Du Sejour* und *Laplace* (Mém. de l'Ac. Paris 1779, 1780) veranlassten, worauf *Lagrange* in einem dritten Mémoire nochmals auf das Problem zurückkam

*) Dissertations sur la théorie des Comètes. Prix de l'Ac. de Berlin. Utrecht 1780 (enthält alle drei Arbeiten).

**) *Schulze*, Moyen simple pour déterminer etc. Nouv. Mém. Berlin Année 1782.

(Mém. de l'Ac. Berlin 1783). Im zweiten Mémoire von 1778 (das erste enthält die geschichtliche Entwicklung des Problems) zeigt *Lagrange* zuerst, dass die Einführung der beiden Elemente, welche die Bahnlage bestimmen, als Unbekannte auf unüberwindliche Schwierigkeiten führt; er entwickelt dann aus der Bedingung, dass die drei Oerter in einer durch die Sonne gehenden Ebene liegen, die Ausdrücke der geocentrischen Distanzen durch die Dreiecksflächen, und ersetzt diese unter Benutzung des *Euler-Lambert*'schen Satzes durch die Zwischenzeiten und die Summen der Radienvectoren. Diese Werthe der geocentrischen Distanzen werden schliesslich in aus der Betrachtung der Dreiecke Sonne—Erde—Comet hervorgehenden Formeln eingetragen, wodurch drei Gleichungen mit den drei Radienvectoren als Unbekannten entstehen. Für die Auflösung dieser äusserst complicirten Gleichungen giebt *Lagrange* ein auf die Kleinheit der Zwischenzeiten basirtes, in praxi kaum durchführbares Verfahren an. — Im Mémoire von 1783 strebt er Vereinfachungen an, führt andere Unbekannte (Radiusvector, Parameter und grosse Axe) ein, stellt für den Radiusvector eine Gleichung siebenten Grades auf, zieht aber schliesslich drei Gleichungen mit drei Unbekannten vor, deren Auflösung wohl noch complicirter ist, als die des zweiten Mémoire. Für die astronomische Praxis konnten diese Methoden ebensowenig Bedeutung gewinnen, wie die im Berl. Jahrbuch für 1783 (Oeuvres VII) mitgeteilte, welche sechs Beobachtungen erfordert; trotzdem bedeuten *Lagrange*'s Arbeiten, durch die erstaunliche Eleganz ihrer Analyse und die Klarheit der Auffassung, für die analytische Behandlung des Problemes einen grossen Fortschritt gegenüber *Euler* und sie haben gewiss grossen Antheil an der bald darauf erfolgenden Lösung durch *Du Sejour* und *Olbers*.

Die weitere Entwicklung kann hier nur mehr kurz angedeutet werden. In den Mém. de l'Ac. de Paris 1779—80 veröffentlichte *Laplace* eine ganz neue Methode, die mit den früheren kaum einen Zusammenhang hat: er ermittelt aus allen vorhandenen Beobachtungen Werthe der ersten und zweiten Differenzialquotienten der Coordinaten und zeigt, wie durch sie die Elemente dargestellt werden können. Diese Methode ist reproducirt in Méc. cél. T. I Livre II (1799), und ist in Frankreich vielfach gebraucht worden. Die Mém. de l'Ac. de Paris 1779 enthalten zwei Methoden von *Du Sejour*; die principiellen Mängel der ersten hat *Olbers* ausführlich aus-

einandergesetzt; die zweite aber, von der merkwürdiger Weise *Du Sejour* selbst wenig gehalten zu haben scheint und die *Olbers* in seiner Kritik ganz übergeht, hat sich später als identisch mit der *Olbers*'schen Lösung herausgestellt (siehe *Fabritius* Astr. Nachr. Band 106). Abgesehen davon, dass *Olbers**) seine Methode, durch die das Problem für lange Zeit zum Abschluss gebracht war, zweifellos selbständig gefunden hat, beruht sein Verdienst darin, dass er klar erkannte, die einfachste Lösung gefunden zu haben und dass er sie, namentlich auch durch eine vortreffliche Kritik der älteren Methoden, derartig ins Licht stellte, dass sie sofort allgemein adoptirt wurde. Wir schliessen diese kurze Uebersicht über den Gang, den das Problem nach *Lambert* genommen hat, mit der Angabe des Princips der definitiven Lösung. Die zweckmässigste Unbekannte ist die geocentrische Entfernung zur Zeit der ersten Beobachtung. Mittelst dieser lässt sich durch eine überraschend einfache Gleichung die geocentrische Distanz zur Zeit der dritten Beobachtung ausdrücken. In der Aufstellung dieser Gleichung, deren Einfachheit auf dem Umstand beruht, dass auch für die Sonne angenommen wird, dass der mittlere Radiusvector die Sehne im Verhältniss der Zeiten schneide, liegt der einzige Punkt, wo *Olbers* über *Lambert* hinausgeht. Durch die eingeführte Unbekannte können dann die äusseren Radienvectoren und die sie verbindende Sehne ausgedrückt werden. Schliesslich wird die Unbekannte durch allmähliche Annäherung so bestimmt, dass der *Lambert*'schen Gleichung genügt wird.

II. Specielle Bemerkungen.

Zur ersten Abhandlung.

Die erste diesem Bändchen einverleibte Arbeit *Lambert*'s ist als selbständiges Werk — *Lambert* nennt es später einmal ein Tractätchen — erschienen und führt den vollständigen Titel:

---

*) Dr. *W. Olbers* Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Cometen zu berechnen. Weimar 1797.

J. H. Lambert
Academiae scientiarum Electoralis Boicae Membri et Professoris Honorarii, Societatis Physico-Medicae Basileensis Membri, Regiae Societati Scientiarum Goettingensi Commercio Literario adjuncti
Insigniores
Orbitae
Cometarum
Proprietates
Augustae Vindelicorum
Sumtibus Eberhardi Klett Viduae
MDCCLXI

Lambert verfasste es in der Periode seiner Wanderjahre im Jahre 1761, als er in seiner Eigenschaft als bayrischer Akademiker längere Zeit Aufenthalt in Augsburg genommen hatte und mit der bayrischen Akademie in München in Verhandlungen stand, nahe gleichzeitig mit seiner Architectonik und den kosmologischen Briefen.

Die hier gebotene Uebersetzung des längst sehr selten gewordenen Buches schliesst sich genau an das Original an; nur die in schwulstigem Latein geschriebene Vorrede habe ich nach Möglichkeit gemildert. Das Original enthält eine sehr grosse Anzahl von Druckfehlern namentlich in den Formeln; diese habe ich ohne Bemerkung beseitigt; es enthält aber auch einige Versehen und Flüchtigkeiten; diese habe ich, wo es möglich war, verbessert, darüber aber in den folgenden Noten berichtet.

Zu § 29. Dieser elegante Ausdruck für den parabolischen Sector rührt von *Lambert* her. *Lagrange* gab dafür einen analytischen Nachweis (Oeuvres IV 475—478), einen ähnlichen *Encke* (Berl. Jahrb. 1833 p. 265).

Zu § 39. Man weist diese Sätze leicht durch Einführung der rechtwinkligen Coordinaten der Punkte N, Q und M nach.

Zu § 40. In diesem für die älteren Methoden der Bahnbestimmung wichtigen Satze weist *Lambert* denjenigen mittleren Radiusvector nach, der *streng* gleich dem arithmetischen Mittel der beiden äusseren gesetzt werden darf.

Zu § 41. Der Nachweis für die Ellipse und Hyperbel gelingt leicht durch Einführung der rechtwinkligen Coordinaten in Bezug auf ein durch die Axen gelegtes Coordinatensystem.

Zu § 51—53. Diese Aufgabe wird schon von *Newton* behandelt und bildet die Grundlage seiner ersten Bahnbestimmungsmethode.

In der *Lambert*'schen Figur 8 und ebenso im Text kommt der Buchstabe e in zweifacher Bedeutung vor. Um die dadurch entstehende Verwirrung zu heben, habe ich den einen Punkt mit a bezeichnet und den Text (§ 52) entsprechend geändert.

Lambert kam in der oben unter 3) citirten Abhandlung auf die Aufgabe nochmals zurück. Er schreibt (Berl. Jahrb. 1779 p. 171): ». . . Auf diese Art entstand das Problem: durch vier Linien von gegebener Lage eine fünfte zu ziehen, welche von jenen in Theile getheilt sei, die ein gegebenes Verhältniss haben. Die Auflösung findet man in *Newton*'s Arith. Univ. Probl. 56, bei *Gregori* L. V. Prop. XI, bei *Cassini* in den Mém. de l'Acad. de Paris 1727, wie auch in meinen Orbitis Cometarum § 51, wo ich aber jedoch (§ 54) angebe, was zu thun ist, wenn die vier Durchschnittspunkte nicht in gerader Linie liegen. Denn die gerade Linie kam mir schon damals als sehr misslich vor.

»Dermalen kann ich nun angeben, worin das missliche eigentlich besteht, und wie es überaus viel vermindert werden könne. Es sei Fig. 32, S die Sonne P, M, N, Q die vier Oerter des Cometen zur Zeit, da die Erde in A, B, C, D ist. Man ziehe die Chorden PQ, AD und die Linien SP, SM, Sm, SN, Sn, SQ, wie auch SA, SB, Sb, SC, Sc, SD, so müssen nicht die Linien BM, CN, sondern die Linien bm, cn gebraucht werden.

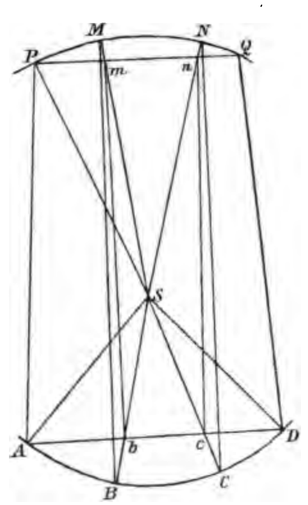


Fig. 32.

»Ungeachtet nun diese Linien bm, cn nicht durch unmittelbare Beobachtung bekannt sind, so lassen sie sich doch aus den Beobachtungen herleiten, weil die Punkte $SmMBb$, sowie auch die Punkte $SnNCc$ in einer Ebene liegen.

»Man zeichne sich auf der Kugelfläche die vier beobachteten Oerter des Cometen. Durch die beiden äussersten ziehe man einen grössten Kreis. Ferner durch den zweiten und dritten ziehe man zwei grösste Kreise nach den Punkten der Ekliptik, wo die Sonne zur Zeit der zweiten und dritten Beobachtung war. Diese zwei Kreise werden die Ebenen BSM, CSN vorstellen, und da wo sie den durch die beiden äussersten Oerter des Cometen gezogenen grössten Kreis durchschneiden, werden die Oerter sein, wo man den Cometen zur Zeit der zweiten und dritten Beobachtung würde gesehen haben, wenn derselbe in m und n und die Erde in b und c gestanden hätte. Dann aber würde die Bewegung sowohl des Cometen als der Erde geradlinig, und wo nicht vollkommen doch bis auf einen unerheblichen Unterschied gleichförmig gewesen sein.«

Dass auch oder vielmehr gerade mit dieser Modification die Aufgabe unbestimmt wird, also zu keiner Lösung des Cometenproblems führen kann, hat *Olbers* bemerkt (Cometen ... § 23).

Zu § 56. Ich habe hier und im Folgenden »semilatus rectum« mit Halbparameter übersetzt, obwohl für diese Grösse jetzt, wenigstens in astronomischen Schriften, »Parameter« gebräuchlich geworden ist.

Zu § 63. Hier wie in dem ganzen Abschnitt, übergeht *Lambert* den in der Anwendung allerdings selten vorkommenden Fall, wo der von den Radienvectoren eingeschlossene Winkel MFN grösser als 180°, also $c > 90^\circ$ wird. Es würde hier zu weit führen, alle Formeln auch diesem Falle anzupassen; es mag genügen anzudeuten, dass dann das Dreieck vom Segment subtrahirt werden muss und dass bei der Auflösung der vorkommenden quadratischen Gleichungen die andere Wurzel gewählt werden muss. Die zuletzt abgeleitete Hauptformel (§ 63) lautet allgemein geschrieben:

$$A = \tfrac{1}{3}\sqrt{AF}\left(\left(\frac{a+b+k}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \mp \left(\frac{a+b-k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \quad \begin{matrix} c < 90^\circ \\ c > 90^\circ. \end{matrix}$$

Zu § 65. Es wird hier der geeignetste Ort sein, die schönen Untersuchungen *Lambert's* über den *parabolischen Sector* einzufügen, die er in der oben unter 1) citirten Abhandlung angestellt hat. Er resümirt im VII. Capitel derselben zuerst die Resultate der Orb. Com. und fügt dann am Schluss folgende neue hinzu.

Auszug

aus »Von Beobachtung und Berechnung der Cometen«. Beiträge zum Gebrauch der Mathematik, Theil 3, Seite 261—268.

. . . .

[**261**] Es bleiben nun aber noch einige Sätze zurück, die ich ebenfalls noch anführen werde.

§ 70. Der erste betrifft die Frage, *ein jedes parabolisches Segment in ein Dreieck von gleichem Inhalt zu verwandeln.* (Fig. 33.) Die Parabel sei AMN, das vorgegebene Segment $MQNRM$. Mit der Sehne MN ziehe man die Tangente TQ parallel, theile RQ in drei gleiche Theile und zweien von diesen Theilen mache man die Höhe des Rechteckes $MmqnN$ gleich, so ist dieses Rechteck von gleicher Grösse mit dem

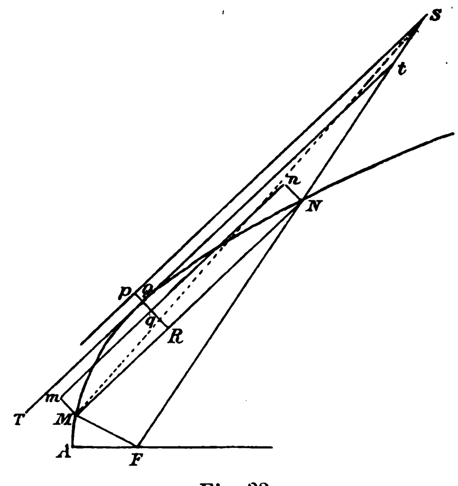


Fig. 33.

Segment $MQNM$. Der Beweis dieses Satzes findet sich im zweiten Theile meiner Beiträge zur Mathematik (Seite 272). Nun kann das Rechteck ohne Mühe auf unzählige Arten in gleich grosse Dreiecke verwandelt werden. Ich werde daher nur dasjenige Dreieck auswählen, das ich im Folgenden gebrauche. Dieses soll mit MN gleiche Basis haben. Demnach muss seine Höhe doppelt so gross als die von dem erstgezeichneten

Rechteck sein. Man mache also $RP = \frac{1}{3} RQ$ und ziehe durch p die Linie pS mit MN parallel, so wird die Spitze des verlangten Dreieckes auf der Linie pS liegen müssen. So aber, wie ich das Dreieck gebrauchen werde, muss eben diese Spitze auch auf der aus dem Brennpunkt F durch N (oder auch [262] durch M) gezogenen geraden Linie FNS liegen, demnach in S, als dem gemeinsamen Schnittpunkt der beiden Linien pS, FS. Das Dreieck ist demnach MSN.

§ 71. Verlängert man nun die Tangente bis t, so ist auch

$$Nt = \tfrac{3}{4} NS.$$

§ 72. Hieraus folgt nun hinwiederum, dass wenn man auf SF jeden beliebigen Punkt S ausserhalb N annimmt und $Nt = \frac{3}{4} NS$ macht, man aus t eine Tangente tQT, und mit derselben die Sehne NM parallel ziehen könne, und sodann ein dem Segment $MQNM$ gleiches Dreieck MSN haben werde. Hiervon lässt sich nun folgende Anwendung machen.

§ 73. (Fig. 34.) Aus dem Brennpunkt F der Parabel $AMQN$ ziehe man eine beliebige Linie FQq und auf derselben nehme man ausser der Parabel einen Punkt q an. Aus

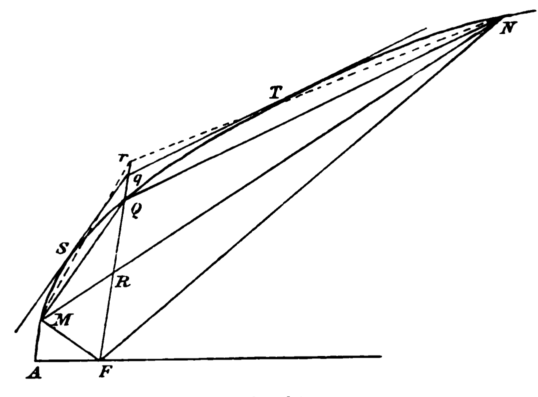


Fig. 34.

diesem ziehe man beiderseits die Tangenten qS und qT und mit denselben parallel die Sehnen QM und QN. Endlich ziehe man FM, FN, MN, so sage ich, *dass sich der Inhalt des Sectors $FMSQF$ zum Inhalt des Sectors $FGTNF$ wie MR zu RN verhalte.*

[263] § 74. Um dieses zu beweisen, so nehme man

$$Qr = \frac{4}{3} Qq$$

und ziehe Mr, Nr durch gerade Linien zusammen. Da nun vermöge des vorhin (§ 72) erwiesenen die Segmente $MSQM$, $NTQN$ den Dreiecken $MrQM$, $NrQN$ gleich sind, so sind auch die ganzen Sectoren $FMSQF$, $FQTNF$ den ganzen Dreiecken $FMrF$, $FNrF$ gleich. Diese Dreiecke haben aber wegen der beiden gemeinsamen Punkte r, F gleiche Höhen über und unter der Linie MRN, demnach verhalten sie sich, wie die Grundlinien MR, RN. Demnach sind auch die Flächenräume der Sectoren im Verhältniss von MR zu RN.

§ 75. Da nun die Zeiten, in welchen die Bögen NQ, QM durchlaufen werden, im Verhältniss der Sectoren sind, so sind sie ebenfalls im Verhältniss der Theile MR, RN der Sehne MN. Man sieht leicht, dass es mit diesem Satze dahin abgesehen ist, die Bewegung des Cometen durch den Bogen MQN auf die Bewegung durch die geradlinige Sehne MN zu reduciren. Denn das Verhältniss der Zeiten trifft wenigstens bei den drei Punkten MRN genau mit dem Verhältniss der Theile MR, RN zusammen.

[264] § 76. Für andere Punkte, die man sich auf der Sehne MN denken kann, ist hingegen dieses Verhältniss nicht ganz genau; es weicht aber desto weniger ab, je kleiner der Winkel MFN ist. Um dieses aufzuklären, sehe man R als einen jeden beliebigen Punkt der Sehne MN an. Zieht man die Linien FRQ, MQ, NQ, so wird immer der Flächenraum der Dreiecke $FMQF$, $FNQF$ im Verhältniss der Linien MR, RN sein. Wenn demnach die ganzen Sectoren $FMSQF$, $FNTQF$ nicht genau in eben dem Verhältniss sind, so fehlt es eigentlich nur an den beiden Segmenten $MSQM$, $NTQN$ und zwar nur, sofern sie von dem Verhältniss $MR:RN$ abweichen. Ist nun aber der Winkel MFN höchstens nur 20 Grad, so sind diese Segmente ein sehr kleiner Theil der ganzen Sectoren und dieses macht, dass das Verhältniss dieser Sectoren von dem Verhältniss der Linien MR, RN nur unmerklich wenig abweichen kann. Da es nun auf MN einen Punkt R giebt, wo die Abweichung vollends gleich Null wird, so trägt auch dieser Umstand mit bei, die Abweichung für jede andere Punkte R noch um desto geringer zu machen. Wir können aber genauer sehen, wie gross die Abweichung jedesmal sein wird.

§ 77. Die Frage kommt darauf an, *dass man überhaupt* [**265**] *das Verhältniss des Dreieckes FMNF zu dem Sector FMmNF bestimme* (Fig. 35).

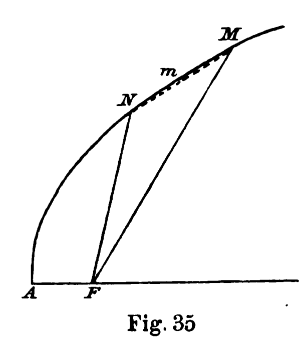


Fig. 35

Haben die Buchstaben a, b, c dieselbe Bedeutung wie in den Orbit. Comet. [§ 28], so haben wir (Orb. Com. § 29) den Inhalt des Dreieckes

$$FMNF = \triangle = ab \sin c \cos c,$$

des Sectors

$$FMmNF = A = \tfrac{1}{3}\sqrt{ab} \sin c \cdot (a + b + \sqrt{ab} \cos c).$$

Man setze nun die Winkel

$$AFN = 2\omega$$
$$AFM = 2\varphi$$

so ist

$$c = \varphi - \omega$$

und, wenn man $AF = f$ setzt,

$$FN = f \sec\omega^2 = b$$
$$FM = f \sec\varphi^2 = a$$

demnach

$$\frac{\triangle}{f^2} = \sec\omega^2 \sec\varphi^2 \sin(\varphi - \omega) \cos(\varphi - \omega)$$
$$= (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\omega)(1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\omega)$$

$$\frac{A}{f^2} = \tfrac{1}{3} \sec\omega \sec\varphi \sin(\varphi - \omega)(\sec\omega^2 + \sec\varphi^2 + \sec\omega \sec\varphi \cos(\varphi - \omega$$
$$= \tfrac{1}{3}(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\omega)(3 + \operatorname{tg}\varphi^2 + \operatorname{tg}\omega^2 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\omega).$$

Hieraus folgt nun:

$$\frac{\triangle}{A} = \frac{3(1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\omega)}{3 + \operatorname{tg}\varphi^2 + \operatorname{tg}\omega^2 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\omega}.$$

Man setze nun ferner

$$\operatorname{tg}\omega = z$$
$$\operatorname{tg}\varphi = z + \zeta,$$

[**266**] so ist,

$$\frac{\triangle}{A} = \frac{3 + 3z^2 + 3z\zeta}{3 + 3z^2 + 3z\zeta + \zeta^2}$$

demnach

$$\frac{\triangle}{A} = \frac{1}{1 + \frac{\zeta^2}{3(1 + z^2 + z\zeta)}}$$

oder auch, wenn man $\varphi - \omega = c$ nimmt,

$$\frac{\triangle}{A} = \frac{1}{1 + \frac{\sec\omega^2 \operatorname{tg} c^2}{3(1 - \operatorname{tg}\omega \operatorname{tg} c)}}.$$

§ 78. Wenn wir nun in Fig. 34 den mittleren Winkel $AFQ = 2\omega$ setzen, so ist $QFN = 2c$, und ebenso können

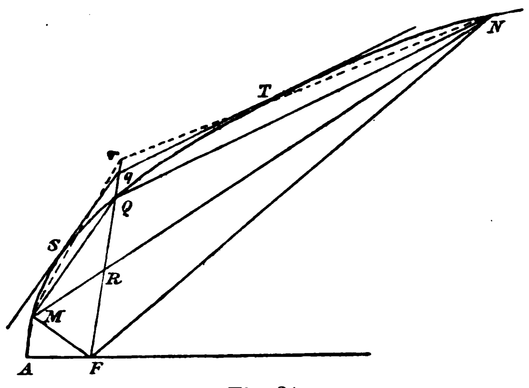


Fig. 34.

wir $QFM = -2\gamma$ annehmen und wir werden der letzten Formel zufolge

$$\frac{FQNF}{FQTNT} = \frac{1}{1 + \frac{\sec\omega^2 \operatorname{tg} c^2}{3(1 - \operatorname{tg}\omega \operatorname{tg} c)}}$$

$$\frac{FQMF}{FQSMF} = \frac{1}{1 + \frac{\sec\omega^2 \operatorname{tg}\gamma^2}{3(1 + \operatorname{tg}\omega \operatorname{tg}\gamma)}}$$

haben. Sollen nun diese Verhältnisse gleich sein, so wird:

$$\frac{\operatorname{tg} c^2}{1 - \operatorname{tg}\omega \operatorname{tg} c} = \frac{\operatorname{tg}\gamma^2}{1 + \operatorname{tg}\omega \operatorname{tg}\gamma}$$

demnach

$$\operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{1 + \operatorname{tg}\omega \operatorname{tg}\gamma} = \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\omega \operatorname{tg}\gamma^2 + \operatorname{tg}\omega^2 \operatorname{tg}\gamma^3 - \cdots.$$

Hieraus erhellt, dass die Winkel c und γ der Gleichheit desto [**267**] näher kommen, je kleiner sie sind, und je kleiner noch überdies der Winkel ω ist.

§ 79. Da man aber diese Winkel nicht so wählen kann, wie sie dieser Bedingung zufolge sein sollten, so wird man dennoch nicht merklich fehlen, wenn sie überhaupt nicht von vielen Graden sind, weil das Verhältniss der Sectoren zu den Dreiecken nur in der zweiten Potenz der Winkel oder ihrer Tangenten $\operatorname{tg} c$, $\operatorname{tg}\gamma$ anfängt, von der Gleichheit abzuweichen. Ist z. B. der ganze Winkel MFN kleiner als 20° und die Winkel c, γ sind nicht merklich verschieden, so ist jeder kleiner als 5° und das Quadrat ihrer Tangenten kleiner als 0.0077. Wenn man demnach um diesen ganzen Unterschied fehlte, so würde der Fehler auf 130 kaum 1 betragen. Es kann sich aber der Fehler niemals so hoch belaufen, es sei denn, dass man einen der Winkel c, γ unendlich klein und

$$\frac{\sec\omega^2}{3(1 - \operatorname{tg}\omega \operatorname{tg} c)} > 1 \quad \text{oder} \quad \frac{\sec\omega^2}{3(1 + \operatorname{tg}\omega \operatorname{tg}\gamma)} > 1$$

annehmen wollte. Ersteres kann aber, zumal wo man mehrere Beobachtungen vorräthig hat, immer leicht vermieden werden, [**268**] wenn man die Zeiten zwischen den Beobachtungen nicht allzu ungleich nimmt.

§ 80. Wie aber auch immer die. Sache ausfallen mag, so kann man die Voraussetzung, dass die Sectoren den Dreiecken gleich genommen werden, dergestalt gebrauchen, dass beide dadurch bis auf einen geringen Unterschied bestimmt werden, und diese Bestimmung kann sodann dienen, sie noch näher zu bestimmen, so oft man es nöthig findet.

. . . .

Zu § 73. Bekanntlich ist die von *Euler* (Th. mot. Com. et Pl. § 3) eingeführte, hier von *Lambert* adoptirte aber mit einem neuen Werth der siderischen Umlaufszeit der Erde berechnete Grösse m später von *Gauss* (Theoria motus § 1)

durch die Grösse k (*Gauss*'sche Constante) ersetzt worden, die definirt ist durch

$$k = \frac{2\pi}{T\sqrt{1+\mu}} \quad (\mu = \text{Masse der Erde}).$$

Euler und *Lambert* vernachlässigen die Erdmasse und definiren

$$m = \frac{1}{n} = \frac{\pi}{T}$$

als Constante des Sonnensystems. Der Zusammenhang zwischen m, n und k ist also

$$k = 2m = \frac{2}{n}.$$

Mit den *Gauss*'schen, noch jetzt beibehaltenen Annahmen berechnet, wird

$$m = 0.008\,601\,049\,47$$
$$n = 116.2649.$$

Ich habe die Grössen m und n in der Uebersetzung beibehalten. Will man die Formeln in der jetzt gewohnten Schreibweise haben, so hat man m durch $\frac{k}{2}$, n durch $\frac{2}{k}$ zu ersetzen.

Zu § 83. Aufgabe 15. Hier entwickelt *Lambert* den wichtigen, für die Bestimmung parabolischer Bahnen grundlegenden Satz, der lange seinen Namen getragen hat, bis *Gauss* (Theor. mot. § 106) darauf aufmerksam machte, dass bereits *Euler* 1743 in der Abhandlung: Miscell. Berol. Tom. VII pag. 20 denselben gefunden hatte, ohne jedoch dessen Bedeutung zu erkennen und ohne dass er ihn selbst bei seinen Arbeiten über Bahnbestimmung jemals benutzt hätte. *Lambert* hat ihn zweifellos selbständig gefunden und jedenfalls zuerst seine Bedeutung erkannt und für die Bahnbestimmung nutzbar gemacht. Er selbst sagt darüber (Beiträge zum Gebrauch der Mathematik Theil III pag. 257): »Wer die Mühe kennt, die man auf Berechnung der Cometenbahnen bisher verwendet hat, wird gar leicht einsehen, dass es noch an einem Satze von solcher Geschmeidigkeit fehlte und dass ich mir allenfalls etwas darauf zu gute halten könne, ihn gefunden, und selbst auch auf die elliptischen und hyperbolischen Laufbahnen ausgedehnt zu haben.« Diese Verallgemeinerung wird denn auch jetzt als *Lambert*'scher Satz bezeichnet, während der specielle, für die Parabel gültige Fall als *Euler*'scher Satz citirt wird.

Lagrange (Nouveaux Mém. de l'Académie de Berlin Année 1778) kennt *Euler's* Priorität nicht, obwohl er, wie aus der prachtvollen historischen Einleitung hervorgeht, die Geschichte des Problems genau studirt hatte; er spricht sich über die Leistung *Lambert's* wie folgt aus: »C'est ce que *Lambert* a fait dans son beau Traité »De orbitis Cometarum«, où il est parvenu à un des Théorèmes les plus élégants et les plus utiles, qui aient été trouvés jusqu'ici sur ce subjet, et qui a en même temps l'avantage de s'appliquer aussi aux orbites elliptiques« (Oeuvres IV p. 444), und an einer andern Stelle: ». . . un Théorème qui, par sa simplicité et par sa généralité, doit être regardé comme une des plus ingénieuses découvertes qui aient été faites dans la Théorie du systeme du monde« (p. 447). Von dem Satze, den *Lambert* durch geometrische Betrachtungen findet, gab *Lagrange* zuerst einen analytischen Nachweis (Mém. de l'Ac. Berlin 1778, Oeuvres T. IV p. 475), dann *Encke* (Berl. Jahrb. 1833). *Encke* hat an der citirten Stelle auch eine elegante Umformung desselben angegeben, durch welche mit Benutzung einer von ihm berechneten Hülfstafel die Sehne rasch aus den Radienvectoren und der Zwischenzeit berechnet werden kann.

Lambert übergeht auch hier (siehe Anmerkung zu § 63) den Fall mit Stillschweigen, wo der zwischen den Radienvectoren eingeschlossene Winkel grösser als 180° wird. Der Satz lautet allgemein geschrieben:

$$T = \frac{1}{m\,3\sqrt{2}}\left(\left(\frac{a+b+k}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \mp \left(\frac{a+b-k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \qquad \begin{matrix} c < 90^{\circ} \\ c > 90^{\circ}. \end{matrix}$$

Zu § 88. Die Zahlenangaben sind im Original durchweg uncorrect; ich habe dieselben verbessert.

Berechnet man die Reihe mit der *Gauss*'schen Constante, so kommt (*FQ* = *R* gesetzt)

$$NM = [8.386\,0964_{-10}]\frac{T}{R^{\frac{1}{2}}} - [3.477\,0480_{-10}]\frac{T^3}{R^{\frac{7}{2}}} + [9.045\,1208_{-20}]\frac{T^5}{R^{\frac{13}{2}}} - \cdots\cdots$$

Zu § 92. Beide Formeln sind im Original uncorrect.

Zu § 117. Der letzte Theil des Satzes ist im Original unverständlich; es ist aber kein Zweifel, dass der Sinn hier richtig wiedergegeben ist.

Zu § 125. Auf dieser Reihenentwickelung beruht die *Encke*'sche Auflösung des *Lambert*'schen Satzes. Das *Encke*-sche η ist bei *Lambert* mit z bezeichnet und das von *Encke* tabulirte μ ist:

$$\mu = \frac{k}{gz} = 1 + \frac{1}{24}z^2 + \frac{5}{384}z^4 + \frac{59}{9216}z^6 + \cdots$$

Encke hat einen endlichen Ausdruck für diese Reihe gefunden; wird nämlich

$$\sin\Theta = \frac{3z}{\sqrt{8}}$$

gesetzt, so folgt

$$\mu = \frac{3\sin\frac{1}{3}\Theta}{\sin\Theta}\sqrt{\cos\tfrac{2}{3}\Theta}\,.$$

Es wird dann

$$k = gz\mu = \frac{4mT}{\sqrt{g}}\mu\,.$$

Zu § 155. Dieser § enthält die erste *Lambert*'sche Bahnbestimmungsmethode. *Lambert* führt das Problem schliesslich auf eine Gleichung 6. Grades. *Lagrange* glaubt, dass dies nur davon herrührt, dass *Lambert* die halbe Summe der äusseren Radiusvectoren gleich dem mittleren setzt; denn er zeigte, dass der Grad dieser Gleichung im allgemeinen Fall mindestens der 7. sein muss (Oeuvres IV, 448). Allein *Cauchy* (Oeuvres Vol. X) hat später nachgewiesen, dass sich die *Lagrange*'sche Gleichung auf den 6. Grad reduciren lässt. (Siehe hierüber *Callandreau*, Dét. des orbites p. 26.)

Die Aehnlichkeit der *Lambert*'schen Methode mit der *Olbers*'schen ist schon mehrfach hervorgehoben worden. Ich weise dies an einer anderen Stelle ausführlich nach und zeige, wie die *Lambert*'sche Methode, wenn man sich nur die Mühe nimmt, seine Ausdrücke vollständig zu entwickeln und wenn man die von ihm zuletzt ganz überflüssiger Weise gemachte falsche Annahme, dass der mittlere Radiusvector gleich dem arithmetischen Mittel der äusseren sei, fallen lässt, zu einem schönen und brauchbaren Verfahren ausgebaut werden kann.

Eine Anwendung der ursprünglichen *Lambert*'schen Methode findet man in den »Beiträgen zum Gebrauch der Math.« Theil 3 Seite 270.

Zu § 157. Da sich der Originaltext an einigen Stellen speciell auf die von *Lambert* entworfene hier durch eine übersichtlichere ersetzte Figur bezieht, so musste er in der Uebersetzung theilweise geändert werden.

Zu § 158. Diese Bahnverbesserungsmethode hat *Lambert* in den »Beiträgen zum Gebrauch der Mathematik« Theil 3 Seite 280 auf den Cometen von 1769 angewendet. Die Methode ist wegen ihrer Weitläufigkeit in der Praxis verlassen worden.

Zu § 159. Eine »Aufgabe 33« fehlt.

Zu § 171. *Lambert* hat in der oben unter 1 citirten Abhandlung Capitel X eine Ergänzung seiner Bahnbestimmungsmethode gegeben, die wegen der Aehnlichkeit mit den vier Grundgleichungen, von denen *Olbers* ausgegangen ist, bemerkenswerth ist und daher hier eingefügt werden soll.

Auszug
aus den »Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik« Theil 3
Seite 293—299.

[293]

Einige Betrachtungen über die parabolische Bahn.

§ 128. So einfach der Lauf eines Cometen in einer parabolischen Bahn ist, so hat man dennoch bisher keine Methode, denselben ohne vorläufiges Versuchen zu bestimmen, und wenn es hoch kommt, so fängt man mit einem quam proxime an, und holt sodann das übrige nach. Dieses ist auch der Weg, den ich genommen habe. Er ist indessen ungleich kürzer, als [294] derjenige, den *Lacaille* und *Lalande* vorschlagen. Bei diesem muss man unzählige Versuche vornehmen, um nur einer einzigen Bedingung Genüge zu leisten, und dann kommen erst noch unzählige Versuche vor, bis auch der anderen Bedingung Genüge geschieht. Zuletzt wird alles dennoch nur durch Einschaltungen und Näherungen erhalten.

§ 129. Ungeachtet ich es nun bei der hier gebrauchten Construction und Berechnungsart kann bewenden lassen, so werde ich doch noch zeigen, dass sich in der That die ganze Sache auf drei Gleichungen bringen lässt. Diese Gleichungen sind zwar ziemlich verwickelt, indessen werde ich sie dennoch angeben, theils weil man bisher noch gar keine gefunden, theils auch weil sich Näherungsarten daraus herleiten lassen, von denen man den Grad der Zuverlässigkeit bestimmen kann.

§ 130. (Fig. 36.) Es sei die Sonne in S und zur Zeit der drei Beobachtungen sei die Erde in A, a, α, der Comet in C, c, γ. Die Linien CB, cb, $\gamma\beta$ stellen die Höhe des Cometen über der Ebene der Erdbahn vor. Nun sind gegeben

I. Die Lage und Länge der Linien SA, Sa, $S\alpha$ und daraus findet man

1) die Sehnen Aa, $A\alpha$, $a\alpha$;

2) die Winkel SAa, SaA; $SA\alpha$, $S\alpha A$; $Sa\alpha$; $S\alpha a$.

[295] II. Die Lage der Linien AB, ab, $\alpha\beta$ oder die beobachteten Längen des Cometen, und daraus ergeben sich

1) die Winkel BAS, baS, $\beta\alpha S$ oder die Unterschiede der Längen der Sonne und des Cometen;

2) die Winkel BAa, $BA\alpha$; baA, $ba\alpha$; $\beta\alpha A$, $\beta\alpha a$.

III. Die Winkel CAB, cab, $\gamma\alpha\beta$ oder die beobachteten Breiten des Cometen.

IV. Aus II und III können auch die Winkel CAS, caS, $\gamma\alpha S$ oder die scheinbaren Abstände des Cometen von der Sonne berechnet und demnach als gegeben angenommen werden.

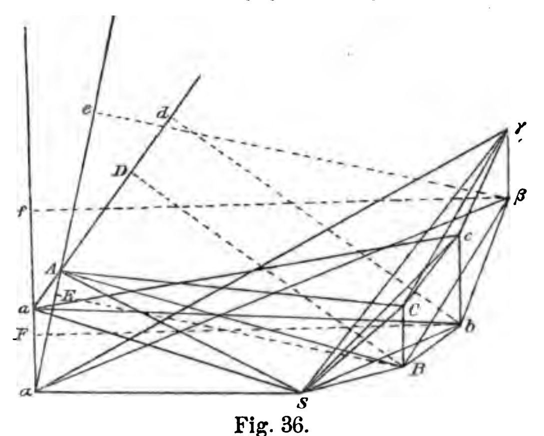


Fig. 36.

§ 131. Nun kommt die Rechnung auf die Distanzen SC, Sc, $S\gamma$ und die Sehnen Cc, $C\gamma$, $c\gamma$ an. Man nenne zu beiden Absichten

$$AC = x \qquad SA = A$$
$$ac = y \qquad Sa = a$$
$$\alpha\gamma = z \qquad S\alpha = \alpha$$

und die Winkel

$$CAS = C$$
$$caS = c$$
$$\gamma\alpha S = \gamma$$

so findet man erstlich die Distanzen:

$$SC = \sqrt{x^2 + A^2 - 2Ax\cos C}$$
$$Sc = \sqrt{y^2 + a^2 - 2ay\cos c}$$
$$S\gamma = \sqrt{z^2 + \alpha^2 - 2\alpha z\cos\gamma}\,.$$

[296] § 132. Ferner setze man die Sehnen

$$Aa = K$$
$$A\alpha = k$$
$$a\alpha = \varkappa$$

und die Winkel (die wir sämmtlich als spitz ansehen)

$$aAB = B \qquad Aab = b \qquad A\alpha\beta = \beta$$
$$\alpha AB = B' \qquad \alpha ab = b' \qquad a\alpha\beta = \beta'$$

und die Breiten (die wir sämmtlich nördlich setzen)

$$CAB = L\,, \qquad cab = l\,, \qquad \gamma\alpha\beta = \lambda$$

so ist erstlich

$$CB = x\sin L \qquad cb = y\sin l \qquad \gamma\beta = z\sin\lambda$$
$$AB = x\cos L \qquad ab = y\cos l \qquad \alpha\beta = z\cos\lambda\,.$$

§ 133. Dieses ist, was sich für jede Beobachtung für sich finden lässt. Da nun aber die Sehnen Cc, $C\gamma$, $c\gamma$ sollen gefunden werden, so müssen die Beobachtungen, je zwei und zwei, verglichen werden, und da haben wir erstlich die Unterschiede

$$CB - cb = x\sin L - y\sin l$$
$$CB - \gamma\beta = x\sin L - z\sin\lambda$$
$$cb - \gamma\beta = y\sin l - z\sin\lambda\,.$$

Von diesen werden wir die Quadrate gebrauchen.

§ 134. Sodann verstehe man, dass in D, d, E, e, F, f rechte Winkel seien, so ist:

[297]

$BD = x\cos L\sin B$	$BE = x\cos L\sin B'$	$bF = y\cos l\sin b'$
$bd = y\cos l\sin b$	$\beta e = z\cos\lambda\sin\beta$	$\beta f = z\cos\lambda\sin\beta'$

und demnach die Unterschiede

$$BD - bd = x\cos L \sin B - y\cos l \sin b$$
$$BE - \beta e = x\cos L \sin B' - z\cos\lambda \sin\beta$$
$$bF - \beta f = y\cos l \sin b' - z\cos\lambda \sin\beta'.$$

Auch von diesen Unterschieden werden wir die Quadrate gebrauchen.

§ 135. Endlich ist

$AD = x\cos L \cos B$	$AE = x\cos L \cos B'$	$aF = y\cos l \cos b'$
$ad = y\cos l \cos b$	$\alpha e = z\cos\lambda \cos\beta$	$\alpha F = z\cos\lambda \cos\beta'$

und daraus folgt

$$Dd = K - x\cos L \cos B - y\cos l \cos b$$
$$Ee = k - x\cos L \cos B' - z\cos\lambda \cos\beta$$
$$Ff = z - y\cos l \cos b' - z\cos\lambda \cos\beta'.$$

Auch hiervon werden nun die Quadrate gebraucht werden.

§ 136. Es sind nämlich die Quadrate der Sehnen

$$Cc^2 = (CB - cb)^2 + (BD - bd)^2 + Dd^2$$
$$C\gamma^2 = (CB - \gamma\beta)^2 + (BE - \beta e)^2 + Ee^2$$
$$c\gamma^2 = (cb - \gamma\beta)^2 + (bF - \beta f)^2 + Ff^2.$$

§ 137. Werden demnach die gefundenen Werthe hierin gesetzt, so erhält man nach gehörigen Reductionen die Sehnen:

298]

$$Cc = \sqrt{(x^2 + y^2 - 2xy(\sin L \sin l + \cos L \cos l \cos(B + b)) - 2Kx\cos L \cos B - 2Ky\cos l \cos b + K^2)}$$
$$C\gamma = \sqrt{(x^2 + z^2 - 2xz(\sin L \sin\lambda + \cos L \cos\lambda \cos(B' + \beta)) - 2kx\cos L \cos B' - 2kz\cos\lambda \cos\beta + k^2)}$$
$$c\gamma = \sqrt{(y^2 + z^2 - 2yz(\sin l \sin\lambda + \cos l \cos\lambda \cos(b' + \beta')) - 2zy\cos l \cos b' - 2zz\cos\lambda \cos\beta' + z^2)}.$$

In diesen Formeln sind die Coefficienten, womit xy, xz, yz multiplicirt sind, Cosinus der Seiten von sphärischen Dreiecken, in welchen der gegenüberstehende Winkel nebst den zwei anderen Seiten gegeben sind. Es könnte auch gezeigt werden, wie sich diese sphärischen Dreiecke in der Figur bilden. Man gewinnt aber weiter keine Abkürzung dabei, da diese Coefficienten, so wie sie hier sind, ebenso leicht in Zahlen berechnet werden.

§ 138. Es seien nun für die Bögen

Cc die Zeiten T

$C\gamma$ » » t

$c\gamma$ » » τ

so ist

$$12mT = (SC + Sc + Cc)^{\frac{3}{2}} - (SC + Sc - Cc)^{\frac{3}{2}}$$

$$12mt = (SC + S\gamma + C\gamma)^{\frac{3}{2}} - (SC + S\gamma - C\gamma)^{\frac{3}{2}}$$

$$12m\tau = (Sc + S\gamma + c\gamma)^{\frac{3}{2}} - (Sc + S\gamma - c\gamma)^{\frac{3}{2}}.$$

Man darf demnach nur in diesen Formeln die § 131. 137 [299] gefundenen Werthe setzen, um für x, y, z drei Gleichungen zu erhalten, wodurch diese Distanzen bestimmt sind.

§ 139. Ungeachtet nun, um x, y, z zu bestimmen, drei Gleichungen genug sind, so lässt sich bei der Parabel noch überdies eine vierte finden, und diese beruht darauf, dass die Linien SC, Sc, $S\gamma$ in einer und derselben Ebene liegen, demnach die Winkel

$$CSc + cS\gamma = CS\gamma$$

sein müssen. Dadurch wird von den sechs Linien SC, Sc, $S\gamma$, Cc, $C\gamma$, $c\gamma$ eine durch die übrigen an sich schon bestimmt. Es wird aber auch diese Gleichung, so wie die drei vorhin gefundenen so weitläufig, dass sie schwerlich jemals werden aufgelöst werden, ungeachtet man dadurch, dass man eine Gleichung mehr hat als nöthig ist, voraussehen kann, dass sich die ganze Rechnung endlich auf drei Gleichungen vom ersten Grade herunterbringen lässt.

. . . .

Zu § 173—179. Die Fig. 21 zu diesen Sätzen ist in den Orb. Com. insofern eine ungeeignete, als in ihr der Schnittpunkt von Cc mit QS und der Schnittpunkt von Cc mit der Ellipse AHB zufällig zusammenfallen; beide Punkte werden auch mit nur einem Buchstaben c bezeichnet, wodurch der Text theilweise undeutlich wird. Ich habe den ersteren Schnittpunkt c, den letzteren c' genannt und den Text entsprechend geändert. In der *Lambert*'schen Figur fällt auch der Endpunkt γ der kleinen Axe der zweiten Ellipse zufällig auf die erste Ellipse, was aber weiter zu keinen Zweideutigkeiten Anlass giebt.

Zu § 201. Ueber diesen bemerkenswerthen Ausdruck der Zwischenzeit durch ein bestimmtes Integral vergleiche man *Klinkerfues* Theor. Astronomie Vorl. 72 und *Callandreau*, Dét. des orbites § 2 (Mém. de l'Obs. de Paris).

Zu § 210. Hier entwickelt *Lambert* den berühmten, seinen Namen tragenden Satz. Den Fall, wo die Differenz der wahren Anomalien grösser als 180° wird, übergeht er auch hier mit Stillschweigen. Betreff anderer Beweise, Verallgemeinerungen und Nutzbarmachung des Satzes namentlich für parabelnahe Bahnen muss auf die Lehrbücher der theoretischen Astronomie verwiesen werden. Ich citire nur folgende besonders wichtige Abhandlungen, die sich mit dem *Lambert*'schen Satze beschäftigen:

1) *Gauss*, Theoria motus § 106 ff.
2) *Marth*, Auxiliary Tables for the solution of *Lambert*'s equation. Astr. Nachr. Band 65, S. 321.
3) *Oppolzer*, Lehrbuch der Bahnbestimmung Bd. II, S. 464.
4) *Callandreau*, Dét. des orbites Ch. I, 1902.

Zur zweiten Abhandlung.

In dieser machte *Lambert* seinen schönen Satz über die scheinbare Bahn der Cometen bekannt. Die Bedeutung desselben beruht nicht darin, dass er durch den Anblick der scheinbaren Bahn einen Schluss auf die Entfernung des Cometen zulässt, sondern, wie *Lambert* selbst sehr wohl erkannt hat, in seiner Wichtigkeit für die Bahnbestimmung, deren innersten Kern er blosslegt. Schon *Lagrange* hat darauf hingewiesen, indem er von einer Gleichung 8. bez. 7. Grades für ϱ'' nachweist, dass dieselbe unmittelbar aus der Betrachtung *Lambert*'s über die scheinbare Bahn fliesse:

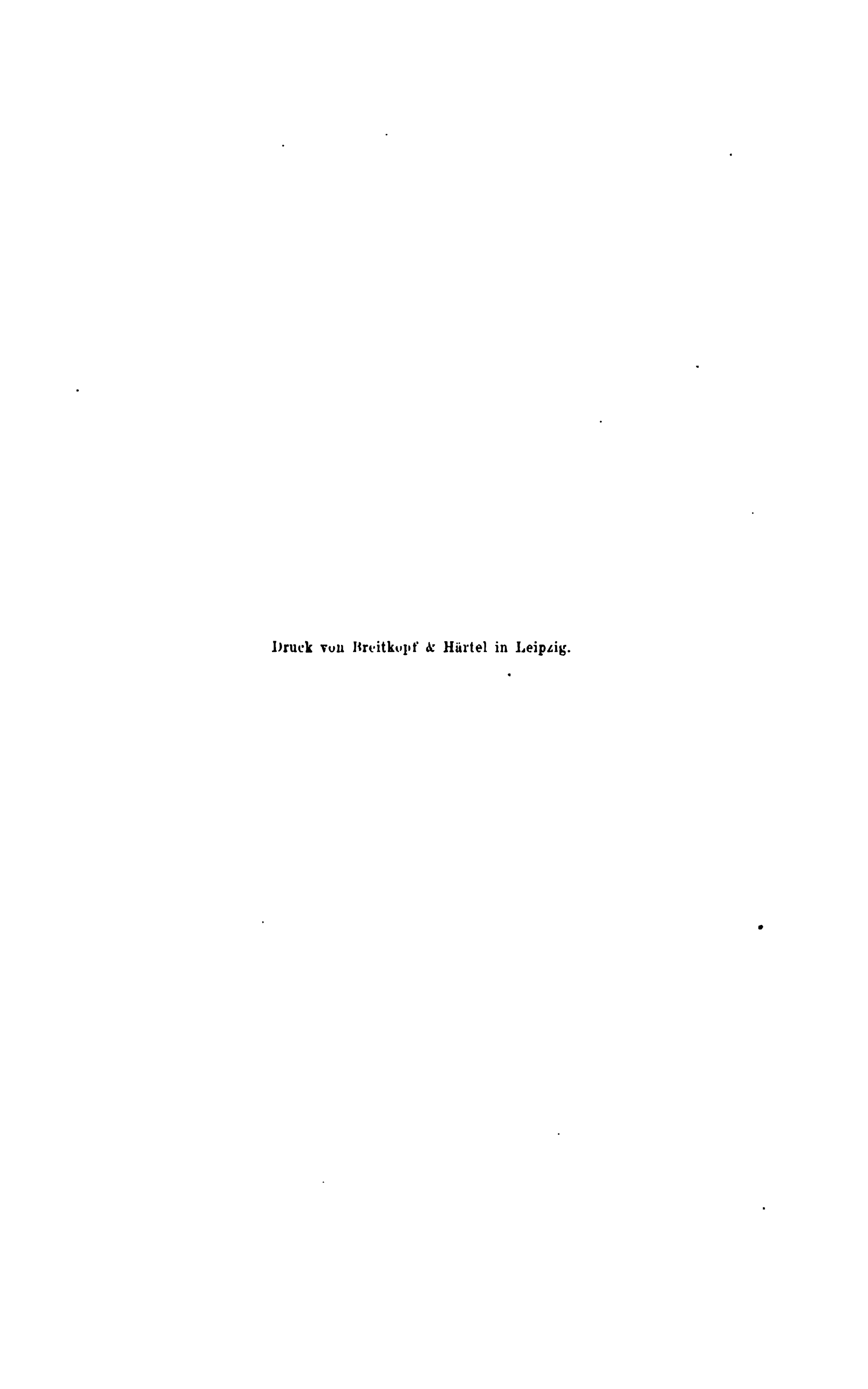
> »la solution précédente reviendra à celle, que *Lambert* a proposée dans les Mémoires de 1771. La méthode de *Lambert* est fondée uniquement sur la considération synthétique de l'orbite apparente de la Comète et n'en est que plus ingénieuse; mais elle ne fait pas voir que la solution qui en résulte a réellement le dernier degré de simplicité, qu'on puisse donner au Problème des Comètes envisagé directement, et il n'y avait qu'une analyse telle que la précédente qui pût lui procurer cet avantage.« (Oeuvres IV, Seite 473.)

Später war es wohl zuerst *Klinkerfues*, der in seiner »Theoretischen Astronomie« Vorl. 31—34 den *Lambert*'schen Satz in den Mittelpunkt rückte und (Vorl. 47) auf seinen Zusammenhang mit der *Gauss*'schen Grundgleichung hinwies. *H. Bruns* (Der *Lambert*'sche Satz, Astr. Nachr. Bd. 118 S. 241) hat die Gleichung achten Grades direct aus dem *Lambert*'schen Satze abgeleitet und zudem gezeigt, dass darauf eine brauchbare Methode der Bahnbestimmung aufgebaut werden kann. *J. Glauser* (Bahnbestimmung nach *Lambert*, Astr. Nachr. 121, S. 65) hat sich noch näher an die direct von *Lambert* gegebenen Andeutungen angeschlossen und eine Methode daraus zusammengestellt.

Lambert muss also auf Grund der vorliegenden Abhandlung als der eigentliche Begründer der directen Bahnbestimmungsmethoden betrachtet werden (*Callandreau*, Dét. des orbites p. 32).

Zu § 28. Diese Gleichung ist identisch mit der *Olbers*'schen Hauptgleichung $\varrho'' = \varrho M$ (*Vogel*, Ueber die Identität der *Lambert*schen und *Olbers*'schen Methode, Astr. Nachr. 136, S. 83).

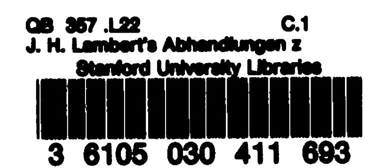
Inhalt.

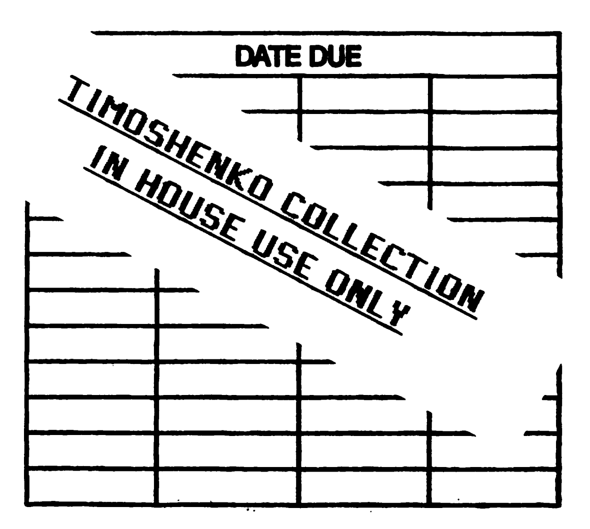


Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.






QB 357 .L22 C.1
J. H. Lambert's Abhandlungen z
Stanford University Libraries
3 6105 030 411 693


DATE DUE
TIMOSHENKO COLLECTION
IN HOUSE USE ONLY